This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909590 3

1. Trigonometry, Spherical, 182.

TD

Die Sphärik

oder

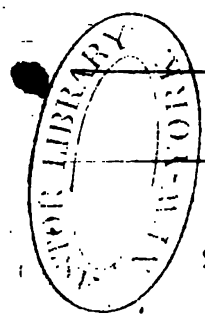
die Geometrie der Kugelfläche

in drei Theilen.

Von

Karl Friedrich Schulz,
Doktor der Philosophie und Konrektor am Gymnasium in Kottbus.

Erster Theil.
Die geometrische Sphärik.



Mit fünf Kupfertafeln.

Leipzig, 1828.
Bei Carl Cnobloch.

Die Sphärik

oder

die Geometrie der Kugelfläche

in drei Theilen.

Von

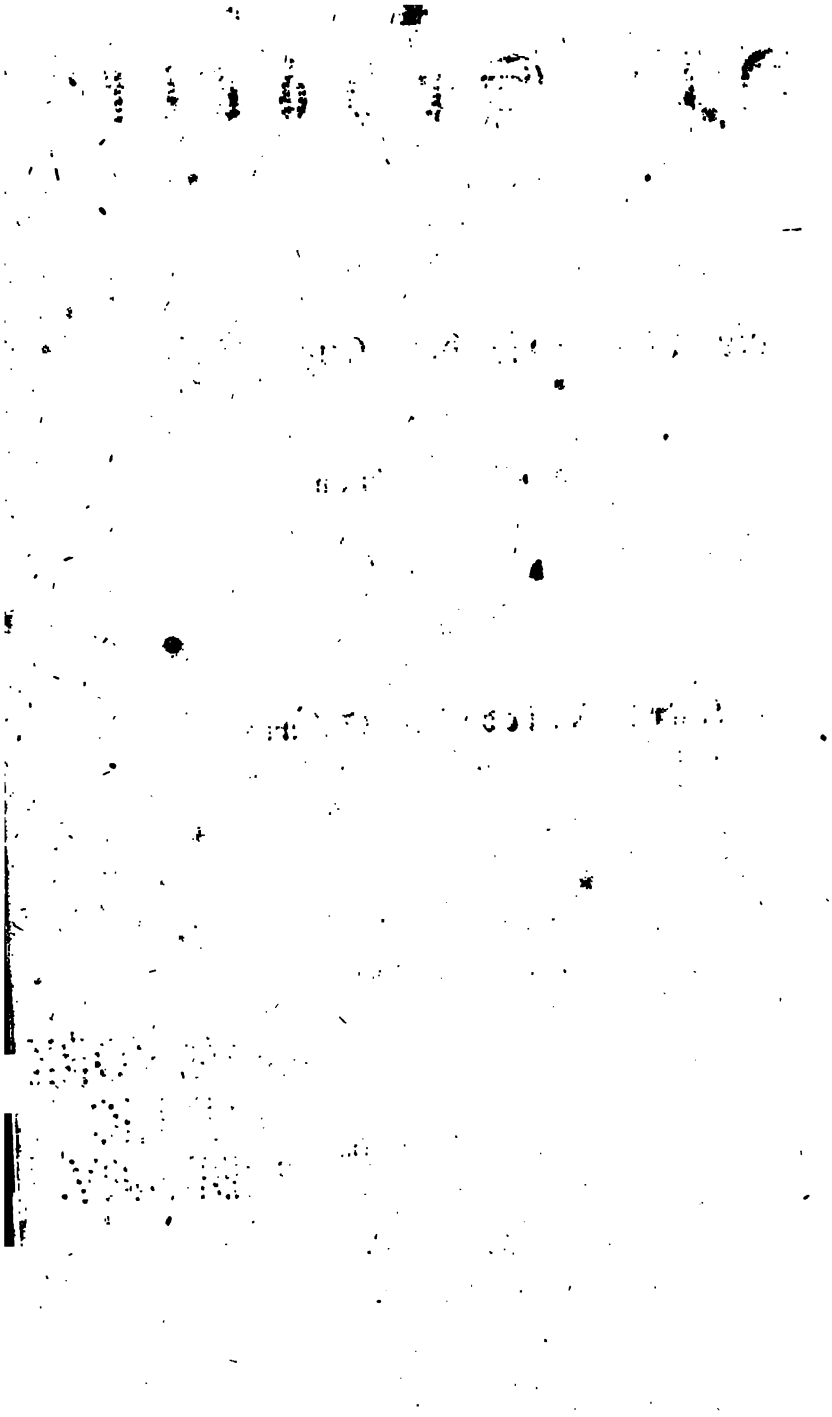
Karl Friedrich Schulz,
Doktor der Philosophie und Konrektor am Gymnasium in Kottbus.

Erster Theil.
Die geometrische Sphärik.

HARVARD COLLEGE LIBRARY

Mit fünf Kupfertafeln.

Leipzig, 1828.
Bei Carl Cnobloch.



Seinem

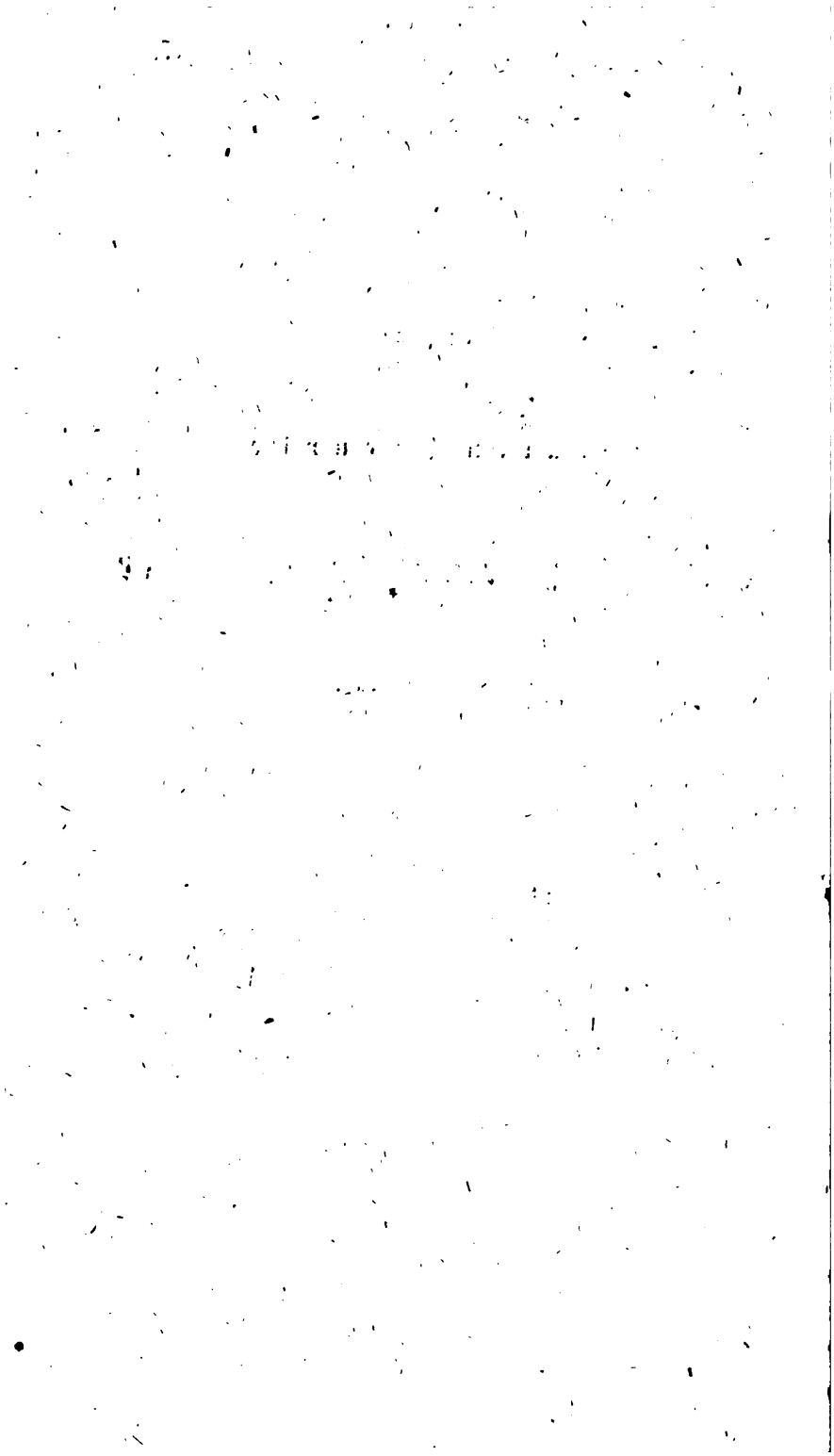
theuren Freunde

Herrn Inſpektor Dr. Neydeker

widmet dieſe Blätter

aus wahrer Hochachtung und Liebe

der Verfaſſer.



Vorrede.

Aus der Natur der Kugelfläche läßt ſich a priori ſchließen, daß eine Geometrie derſelben ſowohl dem Umfange nach ausgedehnter, als dem Inhalte nach viel reichhaltiger ſeyn müſſe, als die Geometrie der Ebne; ja daß dieſe im Allgemeinen aus jener ſich muß ableiten laſſen, weil jede ſphäriſche Figur, wenn ſie unendlich klein gedacht wird, als ebne zu betrachten iſt, alſo die Eigenſchaften unendlich kleiner ſphäriſcher Figuren, die der ebnen ergeben müſſen, wenn überhaupt die Eigenſchaften der ſphäriſchen Figuren bekannt ſind. Wirft man indeß nur einen oberflächlichen Blick auf dieſe Wiſſenſchaft in ihrem gegenwärtigen Zuſtande, ſo wird man geſtehen, daß ſie gar weit hievon entfernt iſt und daß ſie in Vergleich mit der ebnen und der körperlichen Geometrie ungleich geringere Fortſchritte gemacht hat. Nicht einmal in der Lehre von der Gleichheit der ſphäriſchen Dreiecke liefert ſie die Analogieen zu allen planimetriſchen Sätzen

deſſelben Gegenſtandes*); vergebens ſieht man ſich nach Sätzen um, aus denen ſich die Gleichheit der ebnen Parallelogramme oder Dreiecke, die auf einerlei Grundlinien und zwiſchen einerlei Parallelen liegen, oder, die gleiche Grundlinien und gleiche Höhe haben, ableiten ließen; — da doch aus dem von Lexell gefundenen intereſſanten Satze, daß die Spitzen derjeniger ſphäriſchen Dreiecke, welche eine gemeinſchaftliche Grundſeite und gleichen Flächenraum haben, in der Peripherie eines kleineren Kreiſes liegen**) — die Möglichkeit ſolcher Sätze hervorgeht.

Die Urſache der Vernachläſſigung dieſer Wiſſenſchaft iſt wohl darin zu ſuchen, daß man in der Aſtronomie und in der mathematiſchen Geographie, welchen Wiſſenſchaften die Sphärik ohne Zweifel ihre Entſtehung verdankt, mit einigen Sätzen über die Kugelſchnitte und ſphäriſchen Dreiecke befriedigt und durch das Bedürfniß nicht weiter angeregt wurde, die Sphärik mit

*) Einen Beleg hiezu giebt v. Forſtner in ſeiner ſphäriſchen Geometrie (Berlin, 1827), wenn er S. 59 ausdrücklich bemerkt, daß es in der ſphäriſchen Geometrie keinen Satz gebe, um zu beweiſen, daß ein ſphäriſches gleichſchenkliges Dreieck durch das von der Spitze auf die Grundſeite gefällte Perpendikel in zwei gleiche Dreiecke zerlegt werde!

**) Nova Acta Petropol., T. V. p. 1. — Legendre theilt den Satz in ſeinen Éléments de Géométrie (12me éd.) S. 320 mit

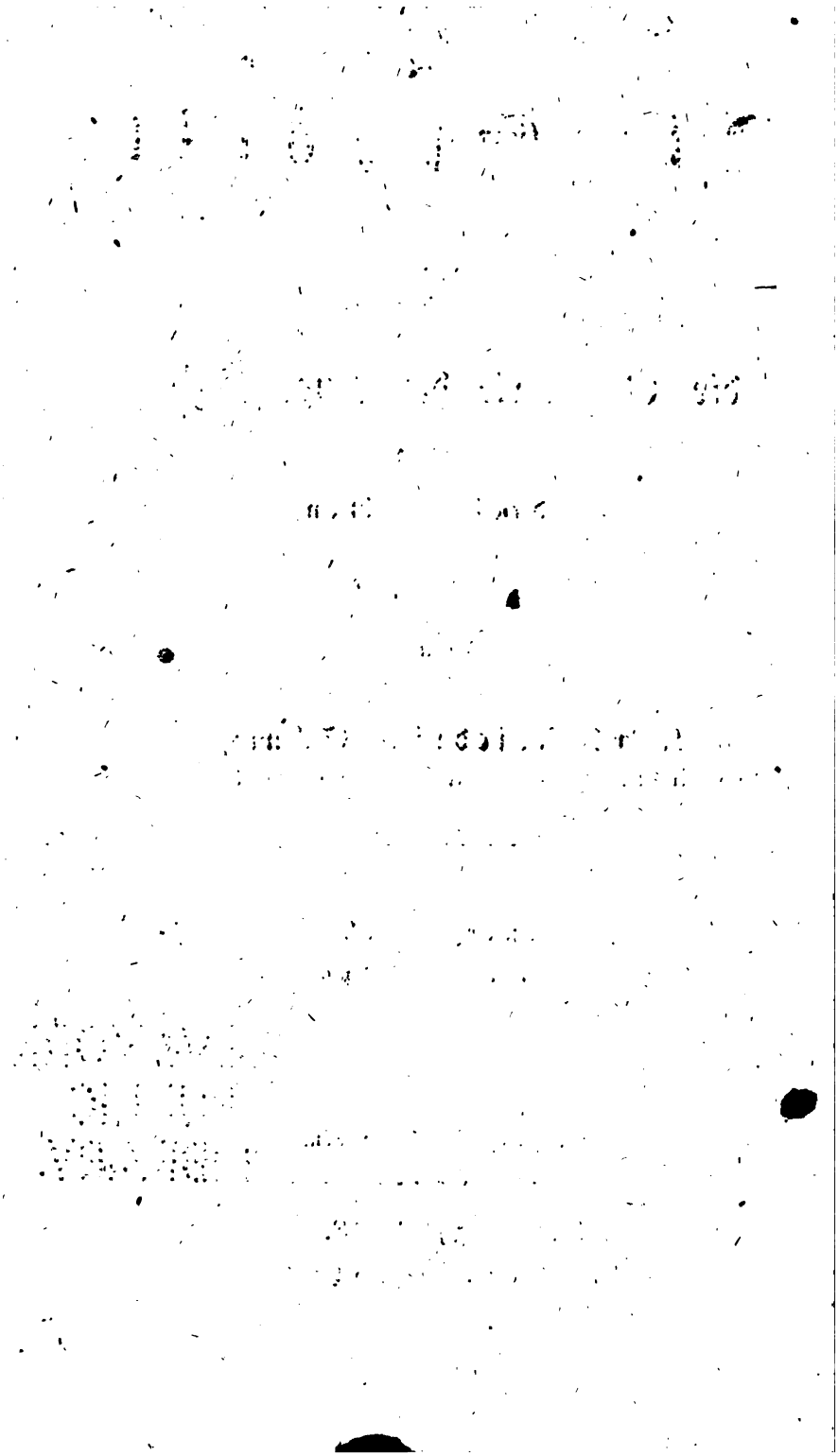
größerer Aufmerksamkeit zu bearbeiten. Daher ist es die sphärische Trigonometrie, welche vorzugsweise mit der Astronomie sich entwickelt und bedeutend vervollkommnet hat. Wie aber die ebne Geometrie, anfangs nur fremden Zwecken, durch welche sie — wie der Name lehrt — zum Daseyn gelangte, untergeordnet, sich zu einer selbstständigen Wissenschaft erhoben hat, so gebührt auch der Sphärik diese wissenschaftliche Selbstständigkeit. Die ersten Schritte dazu, und für lange Zeit die einzigen, haben Theodosius und Menelaus in ihren drei Büchern der Sphärik gethan. Diese Werke indeß, wenn schon für die Zeit ihrer Verfasser verdienstlich genug, sind wegen der Schwerfälligkeit der Entwickelung und Darstellung, wegen so mancher unfruchtbaren, zu keinem nutzbaren Resultate führenden Untersuchungen, die in beiden die Geduld des Lesers ohne Befriedigung lassen*), keinesweges geeignet, ein besonderes Interesse für eine Wissenschaft zu wecken, neben welcher so viele andere Gebiete der Mathematik ungleich größeren Genuß gewähren. Mit Recht sind daher in unsern mathematischen Lehrbüchern jene Sätze überall ausgeschlossen.

Das Bedürfniß einer Bearbeitung der Sphärik nach der oben angedeuteten Idee ist unterdeß mehr und mehr rege und laut geworden. In diesem Sinne gab Pohl seine sphärische Geometrie (Berlin 1819) und

*) Dahin gehören besonders die Sätze über die Verhältnisse der Bogen.

Kurven unterſucht. Die niedere Sphärik zerfällt dann wieder in zwei Theile, die zwar dieſelben Gegenſtände, aber auf verſchiedene Weiſe behandeln. Man kann ſich nämlich darauf beſchränken, ohne Hülfe eigentlicher Rechnung, blos durch geometriſche Betrachtung, die Eigenſchaften der Kugelkreiſe und der daraus gebildeten Figuren zu entwickeln und durch Konſtruktion die geſuchten Größen zu beſtimmen; oder man bedient ſich dazu der Rechnung mit den trigonometriſchen Hülfsgrößen. Erſteres erzeugt die geometriſche, letzteres die trigonometriſche Sphärik, zu der die ſphäriſche Trigonometrie gehört. Dem Inhalte nach ergänzen ſich beide. Vorliegendes Werkchen enthält die geometriſche Sphärik.

Die Zahl der hier aufgenommenen Sätze und Aufgaben hätte ſich zwar um ein Bedeutendes vermehren laſſen; indeß war mein Grundſatz, nur das Wichtigere und das zur Entwickelung eines ſolchen Nöthige aufzunehmen und als ein zuſammenhängendes Ganze möglichſt einfach darzuſtellen. Zwei Hauptelemente der Sphärik, durch welche dieſe Wiſſenſchaft in ihrer Eigenthümlichkeit charakteriſirt wird und die daher in der Darſtellung beſtimmt hervortreten müſſen, liegen in der Polarität und in der Entgegengeſetztheit der ſphäriſchen Figuren. Es iſt in der That zu verwundern, wie die ſo höchſt intereſſante und in ihren Folgen ſo wichtige Eigenſchaft, nach welcher jedes ſphäriſche Polygon, jede Kurve ein Polarpolygon, eine Polarkurve hat, bisher überſehen werden konnte, da von dem ſchon längſt be-



laubt habe; ſo geſchahe dies nur der Kürze wegen, oder wenn der übliche Ausdruck nicht paſſend, oder ein ſolcher mir nicht bekannt war. Aus dem erſten Grunde wählte ich für den gröſsten Kreis die kürzere und im Laufe der Rede bequemere Benennung: Hauptkreis, und verwarf aus dem zweiten Grunde die dafür auch gebräuchliche: Normalkreis; weil dieſe Benennung richtiger und der in der ebnen Geometrie vorkommenden Normale analog, demjenigen Hauptkreiſe, der auf dem Berührungskreiſe einer ſphäriſchen Kurve im Berührungspunkte ſenkrecht ſteht, beigelegt wird. Für den ſogenannten kleineren Kreis drang ſich mir der Ausdruck: Nebenkreis, in doppeltem Sinne auf; einmal, weil die Ebne dieſes Kreiſes nicht durch den Mittelpunkt der Kugel, ſondern neben demſelben vorbeigeht; dann aber, weil dieſer Kreis nicht von der Wichtigkeit, wie der Hauptkreis, iſt. — Die zur Unterſcheidung der beiden Pole eines Kreiſes gewählte Benennung des poſitiven und des negativen Poles iſt freilich willkührlich, jedoch dem Begriffe dieſer Ausdrücke nicht widerſtreitend, vielmehr nicht ohne deutſame Beziehungen. An ſich aber iſt dieſe Unterſcheidung, ſo wie die der beiden Seiten der Ebne und des Kreiſes, durchaus nicht unweſentlich und die einfachere, beſtimmtere Darſtellung, welche ſie möglich macht in der Entwickelung der Polarität, ſo wie mehrer anderer, bei dem Nebenkreiſe vorkommender Eigenſchaften, in die Augen fallend.

Noch muß ich bemerken, daß der letzte Abſchnitt

Einleitung.

1) Die Sphärik ist derjenige Theil der Geometrie, in welchem die Eigenschaften der auf einer Kugelfläche verzeichneten Figuren betrachtet werden. Sie läßt sich eintheilen in die niedere und in die höhere Sphärik. Jene, die niedere Sphärik, beschränkt sich auf die Betrachtung der Kreise und der aus Bogen solcher Kreise gebildeten Figuren auf der Kugelfläche. Diese, die höhere, beschäftigt sich mit den Eigenschaften der übrigen krummen Linien, welche auf der Kugelfläche erzeugt werden.

Die niedere Sphärik kann in Rücksicht der Hülfsmittel, welche zur Erreichung ihres Zweckes angewendet werden, wiederum in die geometrische und in die trigonometrische oder algebraische getheilt werden, je nachdem die vorliegenden Größen blos durch geometrische Konstruktion dargestellt, oder mit Hülfe der trigonometrischen Funktionen durch Rechnung bestimmt werden. Zu der letzteren gehört die sphärische Trigonometrie. — Gegenwärtiges Werkchen behandelt die geometrische Sphärik.

2) Was das Verhältniß der Sphärik zu der ebenen Geometrie und der Stereometrie betrifft, so setzt sie beide Wissenschaften voraus. Denn wenn auch die niedere Sphä-

rik unabhängig von der Lehre des körperlichen Winkels vorgetragen werden kann und muß, so steht sie doch zu demselben, so wie zu den Polyedern überhaupt, in einer so genauen Beziehung, daß ihr Sinn erst dann vollständig begriffen wird, wenn die Kenntniß jener vorhanden ist. In weiterem Umfange aber nimmt die höhere Sphärik die Kenntniß der Stereometrie in Anspruch; sie setzt z. B. die Bekanntschaft mit dem Kegel und dem Cylinder voraus bei Betrachtung der sphärischen Kegelschnitte. Daß auch die höhere Geometrie der Ebne diesem Theile der Sphärik vorausgegangen sey, ist wenigstens naturgemäß und schon deshalb zu wünschen, weil durch sie die sphärischen Kurven ein besonderes Interesse gewinnen.

Anmerk. Aus dem Angedeuteten läßt sich abnehmen, daß das Gebiet der Sphärik ein viel ausgedehnteres, als das der ebenen Geometrie ist, welche aus jener sich als ein besonderer Fall ableiten läßt, wenn die Kugelfläche als unendlich groß, die Figuren auf derselben aber endlich, oder wenn jene als endlich, diese als unendlich klein gedacht werden.

Von den Kreisen auf der Kugelfläche.

§. 1.

Erklärungen. 1) Die Kugel ist derjenige Körper, dessen Oberfläche in allen ihren Punkten eine und dieselbe Entfernung von einem innerhalb der Kugel liegenden Punkte hat, welcher der Mittelpunkt der Kugel heißt.

2) Die gerade Linie, welche den Abstand des Mittelpunktes von der Kugelfläche mißt, heißt der Radius oder Halbmesser; und die gerade Linie, welche, durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, zwei Punkte der Kugelfläche verbindet, der Durchmesser der Kugel.

Zusatz. Aus 1. folgt, daß alle Radien einer Kugel gleich sind, und da jeder Durchmesser der Summe zweier

Radien gleich ist, daß auch alle Durchmesser einer Kugel von gleicher Länge sind.

§. 2.

Lehrsatz. Durch eine gerade Linie wird die Kugelfläche in zwei Punkten geschnitten.

Beweis. Es sey (Figur 1.) AB die gerade Linie, M der Mittelpunkt der Kugel, und A ein Durchschnittspunkt der geraden Linie mit der Kugelfläche. Man fälle von M ein Perpendikel auf AB, welches dieselbe in C treffe; nehme CB=AC und MB; so ist das Dreieck MCB≅MBA; daher MB=MA; folglich auch B ein Punkt der Kugelfläche. Also schneidet die Gerade AB in zwei Punkten die Kugelfläche.

Zusatz 1. Jede von M auf AB gezogene gerade Linie, welche zwischen A und B eintrifft, ist kleiner als MA; daher liegt der Theil AB der schneidenden Linie ganz innerhalb der Kugel.

Zusatz 2. Ein dritter Durchschnitt ist nicht möglich, weil von einem Punkte nach einer geraden Linie nur zwei gleiche Linien möglich sind.

Zusatz 3. Fällt C in A, so ist CB=CA=0. Beide Durchschnitte fallen also in Einen zusammen, und die Linie AB ist eine Tangente. Ist MC größer, als der Radius der Kugel, so kann die Gerade AB gar nicht die Kugelfläche treffen, weil jede andre Linie von M nach AB länger als die kürzeste MC ist.

Zusatz 4. Geht die schneidende Linie durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist der in der Kugel befindliche Theil derselben ein Durchmesser.

Die Durchschnittspunkte eines Durchmessers mit der Kugelfläche nennen wir **Gegenpunkte.**

Zusatz 5. Jeder Punkt der Kugelfläche hat einen, und **nur einen Gegenpunkt.**

§. 3.

Lehrsatz. Der Durchschnitt einer Ebne mit der Kugelfläche ist ein Kreis.

Beweis. Es sey (Figur 2.) CDFE der Durchschnitt einer Ebne mit der Kugelfläche. Von dem Mittelpunkte A der Kugel fälle man eine Senkrechte AB auf die Ebne ECDF; von dem Punkte B, in welchem sie die Ebne trifft, ziehe man in derselben Ebne die Geraden BC, BD bis zu den Durchschnitten C, D mit der Krummen ECDF; die Punkte C, D verbinde man mit dem Mittelpunkte A der Kugel durch die Radien AC, AD. So entstehen die an B rechtwinkligen Dreiecke ABC, ABD, deren Kongruenz aus der Gleichheit ihrer Hypotenusen AC, AD, (Radien der Kugel) und der gemeinschaftlichen Kathete AB erhellt. Daraus folgt: BC=BD. Da nun D jeder beliebige Punkt des Durchschnittes seyn kann, so haben alle Punkte des in einer Ebne liegenden Durchschnittes gleichen Abstand von B. Mithin ist derselbe ein Kreis, dessen Mittelpunkt B ist.

Zusatz 1. Das Perpendikel AB, die Entfernung der Kreisebne vom Mittelpunkte der Kugel, sey mit d, der Radius BD mit r, der Kugelradius mit R bezeichnet. Zwischen R, r, d besteht nun die Gleichung

$$d^2+r^2=R^2;$$

aus welcher ersichtlich ist, daß r abnimmt, wenn d größer wird, und r wächst, wenn d abnimmt. In Worten: Je näher die Kreisebne dem Mittelpunkte der Kugel steht, desto größer ist der Kreis; je entfernter jene, desto kleiner dieser.

Zusatz 2. Ist $d=R$; so ist $r=0$. Der Kreis wird also ein Punkt und die Ebne **berührt** blos die Kugel. Ist $d>R$, so wird r unmöglich; die Ebne kann die Kugelfläche gar nicht treffen.

Zusatz 3. Ist $d=0$, so ist $r=R$; der größte Werth, welchen r haben kann. Der Kreis also, dessen Ebne durch den Mittelpunkt der Kugel geht, ist größer als jeder andre; sein Radius ist dem der Kugel gleich. Solche Kreise nen-

nen wir Hauptkreiſe, während diejenigen, deren Ebnen nicht durch der Kugel Mittelpunkt gehen, Nebenkreiſe heißen mögen.

Da bei jedem Hauptkreiſe r=R iſt, ſo ſind alle Hauptkreiſe einander gleich.

Zuſatz 4. Alle Kreiſe, deren Ebnen vom Mittelpunkt der Kugel gleiche Entfernung haben, ſind einander gleich.

§. 4.

Lehrſatz. Zwei Kreiſe auf der Kugelfläche müſſen entweder ſich ſchneiden und zwar in zwei Punkten, oder ſie berühren ſich nur in einem Punkte, oder ſie treffen ſich gar nicht.

Beweis. Zwei Kreiſe auf der Kugelfläche können nur ſolche Punkte mit einander gemein haben, welche in der Durchſchnittslinie ihrer beiden Ebnen und auf der Kugelfläche liegen. Sie müſſen aber auch jeden Punkt gemein haben, dem dieſe beiden Merkmale zukommen; denn liegt ein Punkt in einer Ebne und auf der Kugelfläche, ſo gehört er zu dem Kreiſe, den dieſe Ebne mit der Kugelfläche bildet. Daher liegt jeder Punkt, der zur Durchſchnittslinie beider Ebnen und zur Kugelfläche gehört, in jedem der beiden Kreiſe, welche die Durchſchnitte jener Ebnen mit der Kugel ſind. Da aber die gerade Linie, in welcher die Ebnen der beiden Kreiſe ſich ſchneiden, entweder in zwei Punkten die Kugelfläche ſchneiden, oder ſie nur in einem Punkte berühren, oder ſie gar nicht treffen muß, ſo folgt, daß die Kreiſe auf der Kugel entweder in zwei Punkten ſich begegnen, oder nur in einem, oder in keinem.

Zuſatz 1. Hauptkreiſe ſchneiden ſich immer in zwei Gegenpunkten. Denn ihre Ebnen, denen der Mittelpunkt der Kugel gemein iſt, ſchneiden ſich in einem Durchmeſſer der Kugel, deſſen Endpunkte Gegenpunkte ſind.

Zuſatz 2. Geht ein Hauptkreis durch einen Punkt a

der Kugelfläche, so geht er auch durch dessen Gegenpunkt a'. Denn ein zweiter durch a gehender Hauptkreis schneidet sich mit dem ersten in zwei Gegenpunkten, und a hat nur einen Gegenpunkt.

Zusatz 3. Geht ein Kreis durch zwei Gegenpunkte, so ist er ein Hauptkreis. Denn in seiner Ebne liegt die gerade Linie, welche, die Gegenpunkte verbindend, durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Folglich geht die Ebne durch den Mittelpunkt der Kugel.

§. 5.

Lehnsatz. Wenn zwei zu verschiedenen Kreisen gehörige Bogen, von denen jeder kleiner als ein Halbkreis ist, gleiche Sehnen haben, so ist von diesen Bogen derjenige, welcher zu dem größern Kreise gehört, der kleinere.

Beweis. Es seyen (Figur 3.) ADB und AD'B zwei Bogen, welche die Sehne AB gemein haben und der Radius DC des Bogens ADB sey größer, als der Radius D'C' des Bogens AD'B. Verbindet man die Endpunkte der Bogen mit den Mittelpunkten ihrer Kreise durch Radien CA, CB; C'A, C'B, und zieht CA' parallel mit C'A, CB' ∥ C'B; so ist der Bogen A'DB' ähnlich dem Bogen AD'B; daher ist

$$\frac{A'DB'}{A'B'} = \frac{AD'B}{AB}.$$

Da aber Bogen A'DB' > ADB, so ist

$$\frac{A'DB'}{A'B'} > \frac{ADB}{AB}; \text{ folglich auch}$$

$$\frac{AD'B}{AB} > \frac{ADB}{AB};$$

folglich AD'B > ADB.

Zusatz 1. Der andre Theil AF'B des kleineren Kreises ist > AD'B, daher auch > ADB. Der Satz ist also

auch dann gültig, wenn der Bogen des kleineren Kreises nicht kleiner als ein Halbkreis ist.

Zusatz 2. Wie der Bogen ADB kleiner ist, als jeder der beiden Theile des kleineren Kreises; so ist der andre Theil AFB des größern Kreises größer als jene.

§. 6.

Lehrsatz. Wenn zwei Punkte der Kugelfläche durch Bogen verschiedener Kreise verbunden werden, so ist derjenige Bogen der kleinere, dessen Ebne vom Mittelpunkte der Kugel eine kleinere Entfernung hat.

Beweis. Es seyen (Figur 4.) A, B zwei Punkte der Kugelfläche und durch dieselben mehrere Kreise gelegt.

Die Ebnen dieser Kreise schneiden sich in der geraden Linie AB, die also gemeinschaftliche Sehne der verschiedenen Bogen ist. Da nun derjenige Kreis, dessen Ebne eine kleinere Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel hat, der größere ist, und unter den eine gemeinschaftliche Sehne habenden Bogen der zum größern Kreise gehörige der kleinere ist (§. 5.); so ist die Behauptung evident.

Zusatz 1. Da der Hauptkreis durch A, B der größte unter allen ist, so ist der Bogen desselben zwischen A und B der kleinste.

Zusatz 2. Durch zwei Punkte der Kugelfläche, die nicht Gegenpunkte sind, kann nur ein Hauptkreis gelegt werden. Denn ginge durch die Punkte A, B noch ein zweiter Hauptkreis, so würde er außer A, B auch deren Gegenpunkt A', B', also vier Punkte mit dem ersten Hauptkreise gemein haben (§. 4. Zus. 2.), was nicht möglich ist.

Direkt folgt es auch daraus, daß die Ebnen beider Hauptkreise durch A und B zusammenfallen müssen, weil sie drei Punkte, A, B, und den Mittelpunkt der Kugel gemein haben.

Anmerk. Wegen Zus. 1. und Zus. 2. wird der Bogen des

Hauptkreiſes als das Maaß der ſphäriſchen Entfernung zweier Punkte der Kugelfläche betrachtet.

Zuſatz 3. Die (ſphäriſche) Entfernung zweier Gegenpunkte von einander iſt ein halber Hauptkreis. Denn der Kugeldurchmeſſer, an deſſen Enden die beiden Gegenpunkte liegen, iſt zugleich der Durchmeſſer des durch ſie gelegten Hauptkreiſes, den er alſo halbirt.

Zuſatz 4. Die Entfernung zweier Punkte A und B (Figur 5.) von einander iſt der Entfernung ihrer Gegenpunkte A′ und B′ gleich. Denn legt man durch A und B einen Hauptkreis, der auch durch A′ und B′ geht (§. 4. Zuſ. 2.), ſo iſt Halbkreis ABA′=BA′B′; daher nach Abzug von BA′, AB=A′B′.

Zuſatz 5. Jeder Punkt zwiſchen A und B findet ſeinen Gegenpunkt zwiſchen A′ und B′, der eben ſo weit von A′ oder B′ abſteht, als jener von A oder B.

Anmerk. Man kann daher ſolche Bogen, wie AB, A′B′, Gegenbogen nennen.

§. 7.

Erklärung. Macht man die Gerade AB (Figur 2.), welche die Entfernung der Ebne eines Kreiſes von dem Mittelpunkte der Kugel mißt, durch Verlängerung nach beiden Seiten zu einem Durchmeſſer, ſo heißt dieſer auf der Kreisebne in dem Mittelpunkte ſenkrecht ſtehende Durchmeſſer die Achſe des Kreiſes, und die beiden Gegenpunkte, in welchen die Achſe der Kugelfläche begegnet, heißen die Pole deſſelben Kreiſes, die wir ſo unterſcheiden wollen, daß wir den einen, gleichviel welchen, den poſitiven, den andern den negativen Pol nennen.

Zuſatz 1. Jeder Kreis hat nur eine Achſe, weil von dem Mittelpunkte der Kugel auf ſeine Ebne nur ein Perpendikel fällt; aber eine Achſe gehört zu allen den Kreiſen, deren Ebnen mit einander parallel ſind und von denen einer jene Achſe hat.

Solche Parallelkreise also haben zwar stets eine gemeinschaftliche Achse und daher auch gemeinschaftliche Pole. Da aber unter diesen parallelen Ebnen nur eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, und auf Ebnen, die sich schneiden (wie die der Hauptkreise), eine und dieselbe grade Linie nicht senkrecht seyn kann; so findet unter den Hauptkreisen keine Gemeinschaft der Achsen und Pole statt.

Zusatz 2. Setzt man auf die Ebne eines Kreises senkrecht die Ebne zweier Hauptkreise, so ist der Durchschnitt der beiden Ebnen die Achse und die Durchschnitte der Hauptkreise sind die Pole jenes Kreises.

§. 8.

Lehrsatz. Jeder Pol eines Kreises ist von allen Punkten der Peripherie desselben gleich weit entfernt.

Beweis. Es sey (Figur 6.) DAA'E ein Kreis, dessen Achse PQ die Ebne desselben in B schneidet. Die Entfernung des Poles P von den beliebigen Punkten A, A' der Peripherie wird durch die Bogen PA, PA' der Hauptkreise PAQ, PA'Q gemessen. (§. 6. Anmerk.)

Die Ebnen dieser Hauptkreise schneiden die Ebnen des Kreises DAA'E in den auf PQ Senkrechten AB, A'B, welche als Radien einander gleich sind. Zieht man die Kugelradien AC, A'C, so sind die Dreiecke ABC, A'BC wegen Gleichheit aller Seiten kongruent; daher die Zentriwinkel ACB, A'CB und folglich auch die Bogen derselben AP, A'P einander gleich.

Aus AP=A'P folgt für den andern Pol AQ=A'Q.

Anmerk. Man kann daher die Pole eines Kreises auf der Kugel die sphärischen Mittelpunkte und die Bogen AP, AQ die sphärischen Radien desselben nennen, von welchen Radien dann jeder das Supplement des andern ist.

Wird künftig schlechthin von dem Mittelpunkte eines solchen Kreises gesprochen, so soll damit der nächste Pol, also unter dem Radius der kleinere von den beiden gemeint seyn.

Zuſatz 1. Alle Punkte, welche einerlei Entfernung von einem Punkte P der Kugelfläche haben, liegen in einem ebenen Kreiſe. Denn man lege durch zwei jener Punkte A, A' eine Ebne ſenkrecht auf die grade Linie, welche von P nach dem Mittelpunkte C der Kugel geht. Der Schnitt dieſer Ebne mit der Kugelfläche iſt ein Kreis, deſſen Mittelpunkt P, und deſſen Radien alle =PA=PA' ſind, in deſſen Peripherie alſo alle jene um PA von P entfernten Punkte liegen.

Zuſatz 2. Je kleiner BC iſt, deſto größer iſt der Winkel ACP; deſto größer alſo der Radius AP.

Fällt B mit C und demnach AB und AC mit der auf PQ Senkrechten aC zuſammen; ſo wird Winkel ACP = aCP = einem Rechten, und der Radius aP ein Quadrant.

Der Radius (aP) des Hauptkreiſes iſt alſo ein Quadrant, deſſen Supplement (aQ) ebenfalls ein Quadrant iſt.

Zuſatz 3. Da gleiche Sehnen gleicher Kreiſe zu gleichen Bogen gehören, ſo kann man einen Kreis auf der Kugelfläche beſchreiben mit Hülfe eines Zirkels, deſſen Oeffnung die Sehne des (ſphäriſchen) Radius mißt. Auch wird man den ſphäriſchen Mittelpunkt eines Kreiſes finden, wenn man um zwei Punkte ſeiner Peripherie Kreiſe beſchreibt, deren Radien dem ſeinigen gleich ſind. Der Durchſchnitt dieſer Kreiſe innerhalb des vorliegenden muß der Mittelpunkt deſſelben ſeyn, weil dieſer in jedem der beiden Kreiſe liegt. Hieraus ergiebt ſich der Satz:

Iſt ein Punkt innerhalb eines Kreiſes auf der Kugelfläche von zwei Punkten der Peripherie um den (ſphäriſchen) Radius deſſelben Kreiſes entfernt, ſo iſt er der Mittelpunkt oder Pol deſſelben.

Zuſatz 3. Wird auf die Ebne eines Kreiſes ſenkrecht die Ebne eines Hauptkreiſes geſetzt, ſo geht der innerhalb des erſten Kreiſes liegende Bogen des Hauptkreiſes durch den Mittelpunkt deſſelben (§. 7. Zuſ. 2.), der alſo der Mittelpunkt dieſes ſphäriſchen Durchmeſſers iſt.

Zusatz 4. Aus Zus. 2. und Zus. 3. ergiebt sich für Hauptkreise insbesondere:

1) Der Mittelpunkt oder Pol eines Hauptkreises ist derjenige Punkt, welcher von zwei Punkten der Peripherie desselben um einen Quadranten absteht.

2) Der Endpunkt des Quadranten, dessen Ebne auf der Ebne eines Hauptkreises senkrecht steht, ist der Pol dieses Hauptkreises.

Anmerk. Doch ist in 1. nicht zu übersehen, daß die dort erwähnten zwei Punkte nicht Gegenpunkte seyn dürfen; weil die um dieselben als um Pole beschriebenen Hauptkreise nicht von einander verschieden seyn können (§. 7. Zus. 1.), sondern zu einen zusammenfallen, also keinen Durchschnittspunkt geben, wie in Zus. 1.

§. 9.

Lehrsatz. Wenn mehrere Kreise sich in denselben zwei Punkten schneiden, so liegen ihre Pole in einem und demselben Hauptkreise.

Beweis. Schneiden sich mehrere Kreise in denselben zwei Punkten, so haben sie die zwischen denselben enthaltene geradlinige Sehne gemein. Da nun die Achse jedes Kreises auf der Ebne desselben senkrecht steht, so steht die Ebne je zweier Achsen auf dem Durchschnitt der zugehörigen Kreisebnen, d. i. auf der gemeinschaftlichen Sehne senkrecht. Daher müssen die Ebnen, welche durch jede zwei Achsen gebildet werden, entweder unter einander parallel seyn, oder in einer Ebne liegen. Ersteres ist aber nicht möglich, weil jede dieser Achsen-Ebnen durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Daher liegen alle in einer Ebne, welche, durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, einen Hauptkreis bildet, in welchem die Pole aller jener Kreise liegen.

Zusatz. Sind a und b (Figur 7.) die Durchschnittspunkte, α, β, γ die Pole oder Mittelpunkte der sich schnei-

denden Kreiſe; ſo ſind $a\alpha$, $a\beta$, $a\gamma$ die ſphäriſchen Radien derſelben.

Sind zwei dieſer Radien Quadranten, etwa $a\alpha$, $a\beta$, ſo ſind a und b die Pole des Hauptkreiſes $\alpha\beta\gamma$ (§. 8. Zuſ. 4.); alſo auch alle übrige Radien Quadranten. Wenn alſo zwei oder mehrere Hauptkreiſe ſich in denſelben zwei Punkten ſchneiden, ſo ſind dieſe Durchſchnittspunkte die Pole desjenigen Hauptkreiſes, in welchem die Pole jener Kreiſe liegen.

§. 10.

Erklärung. Den Winkel oder die Neigung der Ebnen zweier Kreiſe wollen wir ſchlechthin den Winkel der Kreiſe nennen, und da wir dieſen Ausdruck zuerſt auf Theile der Kreiſe, auf Bogen anwenden, ſo verſtehen alſo unter dem Winkel oder der Neigung zweier Kreisbogen den Winkel der zugehörigen Kreisebnen. Die Bogen eines ſolchen Winkels heißen dann ſeine Schenkel.

Zuſatz. Was alſo von den Neigungswinkeln der Ebnen gilt, gilt auch von den Winkeln der Kreiſe und Bogen, z. B. daß die Summe zweier Nebenwinkel gleich zwei Rechten iſt; daß Scheitelwinkel gleich ſind; daß in einem Punkte eines Kreiſes nur ein Perpendikel möglich iſt u. ſ. w.

Anmerk. Wenn von dem Winkel zweier Ebnen geredet wird, ſo darf man nicht außer Acht laſſen, daß zwei Ebnen immer vier Winkel bilden. Unterſcheidet man die beiden Seiten, welche jeder Ebne zukommen, als poſitive und negative, und bezeichnet ſie für eine Ebne durch A und $\overline{A}$, für eine zweite Ebne durch B, $\overline{B}$; ſo laſſen ſich die vier Winkel beider Ebnen durch AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, $\overline{AB}$ darſtellen, wo $AB = \overline{AB}$; $A\overline{B} = \overline{A}B$, alſo die zwiſchen entgegengeſetzten Seiten der Ebnen enthaltenen Winkel einander gleich ſind. Welche Seite jeder Ebne als die poſitive zu nehmen ſey, iſt im Allgemeinen willkührlich; durch beſondre Umſtände kann dieß jedoch entſchieden werden. Da durch einen der vier Winkel zweier Ebnen alle beſtimmt ſind, ſo kann man bei Betrachtung zweier Ebnen an einen Winkel ſich halten, und die-

jenigen Seiten der Ebnen, zwiſchen denen der gemeinte Winkel liegt, als poſitive nehmen. Umgekehrt, ſind irgend wie zwei Seiten der Ebnen als poſitive bezeichnet, ſo kann man den zwiſchen ihnen befindlichen Winkel als den Winkel der Ebnen anſehen, wenn ſchlechthin von einem Winkel geſprochen wird.

Dieſe Bemerkung iſt nicht gleichgültig, wie wir ſogleich und weiterhin ſehen werden.

§. 11.

Aufgabe. Den Winkel zweier Kreiſe zu beſtimmen.

Auflöſung. Wir wollen zwei Fälle unterſcheiden:

1) wenn die gegebenen Kreiſe ſich ſchneiden;

2) wenn ſie ſich nicht ſchneiden.

1) Es ſeyen acb, a′cb′ (Figur 8.) zwei Kreiſe, welche ſich in c und c′ ſchneiden, deren Ebnen alſo die geradlinige Sehne cc′ gemein haben. Diejenigen Seiten der beiden Kreisebnen, welche dem Mittelpunkte der Kugel zugekehrt ſind, mögen als poſitive, alſo der eben dahin gerichtete Winkel der Ebnen als der zu beſtimmende genommen werden.

Legt man durch die Mittelpunkte der beiden Kreiſe einen Hauptkreis, deſſen Ebne durch die Achſe derſelben geht (§. 9.) und auf den Ebnen beider ſenkrecht ſteht, ſo ſchneidet ſie dieſe Kreisebnen in den gradlinigen Durchmeſſern ab, a′b′, die zugleich Sehnen des Hauptkreiſes ſind. Wenn nun die drei Durchſchnittslinien dreier Ebnen nicht parallel ſind, ſo treffen ſie in einem Punkte zuſammen. Es müſſen alſo die drei Durchſchnitte ab, a′b′, cc′ ſich in einem Punkte, d, dem Durchſchnittspunkte der Sehnen ab und a′b′, ſchneiden.

Da nun die Ebne des Hauptkreiſes ab′ba′ auf den beiden Kreisebnen acb, a′cb′ ſenkrecht ſteht, ſo ſteht deren Durchſchnitt cc′ auf dem Hauptkreiſe ſenkrecht; daher ad, a′d auf cc′ rechtwinklig, und der Winkel ada′ iſt der geſuchte Neigungswinkel der beiden Kreisebnen.

Um dieſen näher zu beſtimmen, erinnere man ſich, daß

der Winkel zweier sich schneidenden Sehnen gleich der halben Summe der zwischen seinen Schenkeln und zwischen den Schenkeln seines Scheitelwinkels enthaltenen Bogen, also der Winkel $ada' = \frac{\text{Bogen } b'b + \text{Bogen } a\alpha\beta a'}{2}$ ist, von denen b'b von beiden Kreisen eingeschlossen, $a\alpha\beta a'$ aber ausgeschlossen ist. Wir können also das gefundene Resultat so aussprechen:

Der Neigungswinkel zweier sich schneidenden Kreise ist gleich der halben Summe der von beiden eingeschlossenen und ausgeschlossenen Bogen des Hauptkreises, der durch ihre Mittelpunkte geht. Oder bezeichnet man die Bogen bb', $a\alpha\beta a'$ nach den Seiten der Kreisebnen, zwischen denen sie liegen, so liegt $a\alpha\beta a'$ zwischen den positiven, bb' zwischen den negativen Seiten derselben, also jeder zwischen gleichartigen Seiten, während die andern beiden Bogen b'a, ba' zwischen ungleichartigen Seiten liegen. Daher läßt sich der eben ausgesprochene Satz so stellen:

Der Neigungswinkel zweier sich schneidenden Kreise ist gleich der halben Summe der zwischen den gleichartigen Seiten ihrer Ebnen enthaltenen Bogen des durch ihre Mittelpunkte gehenden Hauptkreises.

2) Der Fall, wenn die Kreise sich nicht schneiden, läßt sich aus dem Abgehandelten leicht ableiten. Läßt man nämlich den Mittelpunkt des Kreises a'cb' sich in dem Hauptkreise aba' herabbewegen, während der andre Kreis bleibt, so nimmt der eingeschlossene Bogen bb' ab; wird bei der bloßen Berührung der Kreise Null und geht dann über in einen ausgeschlossenen Bogen, der für einen negativen eingeschlossenen zu nehmen ist. Die Summe $\frac{a\alpha\beta a' + b'b}{2}$ verwandelt sich also in die Differenz $\frac{a\alpha\beta a' - b'b.}{2}$ Unmittelbar läßt sich dies durch den Satz erweisen: Der Winkel zweier Sekanten eines Kreises ist gleich der halben Differenz der

von ihnen abgeschnittenen Bogen des Kreises. Sind nämlich (Figur 9.) aeb, a'e'b' zwei sich nicht schneidende Kreise, so liegt der Durchschnitt cc' ihrer Ebnen außerhalb der Kugel, und aus den oben angeführten Gründen müssen auch hier die Durchschnitte ab, a'b' und cc' sich in einem Punkte d treffen, und der Winkel ada' der Sekanten ad, a'd, der Neigungswinkel der Kreise seyn. Dessen Maaß ist nun die halbe Differenz der Bogen aαβa' und bb'.

Bezeichnen wir auch hier die Bogen aαβa' und bb' nach den Seiten der Kreisebnen, so liegen beide zwischen den positiven Seiten derselben, während zwischen den negativen Seiten gar kein Theil der Kugel liegt.

Es ist also der Winkel zweier sich nicht schneidenden Kreise auf der Kugelfläche gleich der halben Differenz der zwischen den gleichartigen Seiten ihrer Ebnen liegenden Bogen des Hauptkreises, der durch ihre Mittelpunkte geht.

Anmerk. Beide Sätze sind Analogieen der erwähnten planimetrischen Sätze.

Zusatz 1. Da bei der Berührung der Kreise der Bogen bb' verschwindet, so ist ihr Neigungswinkel dann $= \frac{a\alpha\beta a'}{2}$. In Worten: Der Winkel zweier sich berührenden Kreise auf der Kugelfläche ist der Hälfte des zwischen den positiven Seiten ihrer Ebnen enthaltenen Bogens desjenigen Hauptkreises gleich, welcher durch die Mittelpunkte der Kreise geht.

Zusatz 2. Setzen wir in obigen Formeln, und zwar in der des ersten Falles für aαβa' den gleichen Werth $2\pi - 2r - 2r' + bb'$, wo r, r' die sphärischen Radien der Kreise, π die Hälfte eines Hauptkreises bedeutet, so ist

$$ada' = \pi - r - r' + bb';$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) + bb';$$

Im zweiten Falle ist $a\alpha\beta a' = 2\pi - 2r - 2r' - bb'$; daher

$$ada' = \pi - r - r' - bb'$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) - bb'.$$

Der Winkel zweier sich schneidenden Kreise ist also der Summe aus den Komplementen ihrer Radien und dem von beiden eingeschlossenen Bogen des durch ihre Mittelpunkte gehenden Hauptkreises gleich. Bei sich nicht schneidenden Kreisen tritt die Differenz zwischen der Komplementensumme und bb' ein. Bei sich berührenden Kreisen endlich wird $ada' = \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right)$, also der Summe aus den Komplementen der Radien gleich.

In allen drei Fällen läßt sich statt der Komplementensumme $\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right)$ das Supplement der Radiensumme $\pi - (r + r')$ setzen.

Zusatz 3. Wird im zweiten Falle $b'b = a\alpha\beta a'$, so ist $ada' = 0$; die Kreise sind also parallel und in Zus. 2. ist dann $\pi = r + r' + bb'$; die Pole der beiden Kreise also Gegenpunkte, gemäß §. 7. Zus. 1.

Zusatz 4. Ist einer von den beiden Kreisen ein Hauptkreis, etwa der, dessen Radius mit r' bezeichnet war, so ist $r' = \frac{\pi}{2}$; und es wird dann

1) wenn die Kreise sich schneiden: $ada' = \frac{\pi}{2} - r + bb'$
$= \text{Komplem. } r + bb' = \text{Komplem. } (r - bb')$;

2) wenn die Kreise sich nicht treffen: $ada' = \frac{\pi}{2} - r - bb'$
$= \text{Komplem. } r - bb' = \text{Komplem. } (r + bb')$;

3) wenn die Kreise sich berühren: $ada' = \frac{\pi}{2} - r$
$= \text{Komplem. } r$.

Zusatz 5. Geht der Hauptkreis durch den Mittelpunkt des andern Kreises, so ist $bb' = r$, und $ada' = \frac{\pi}{2}$.

Der (sphärische) Radius steht also auf seinem Kreise senkrecht. —

Ist auch der zweite Kreis ein Hauptkreis, so ist sein Radius ein Quadrant.

Demnach stehen alle vom Pole eines Hauptkreises auf denselben gezogenen Quadranten senkrecht auf demselben.

Und daher steht jeder Hauptkreis, der durch die Pole eines andern geht, auf demselben senkrecht.

Zusatz 6. Sind beide sich schneidende Kreise Hauptkreise, so ist $r=\frac{\pi}{2}$; $r'=\frac{\pi}{2}$; also ihr Neigungswinkel $=bb'$ $=a\alpha\beta a'$. In Worten:

Der Winkel zweier Hauptkreise ist gleich demjenigen Bogen des durch ihre Pole gehenden Hauptkreises, welcher zwischen den positiven, d. i. zwischen den den Winkel einschließenden Seiten ihrer Ebnen enthalten ist.

Sind also (Figur 10.) ABC, DEC Hauptkreise und FBE der durch ihre Pole gehende, so ist Winkel ACD = BE. Da die Durchschnitte zweier Hauptkreise zugleich die Pole des durch ihre Pole gehenden Hauptkreises, also BC und CE Quadranten sind; so wird der den Winkel ACD messende Bogen BE gefunden, wenn man jeden Schenkel gleich einem Quadranten nimmt und ihre Endpunkte durch einen Hauptbogen verbindet.

Zusatz 7. Der Nebenwinkel adb' von ada' ist

im ersten Falle $=\frac{\text{Bogen ab'}+\text{Bogen a'b}}{2}=r+r'-bb'$;

im zweiten Falle $=r+r'+bb'$;

im Berührungsfalle $=r+r'$;

wie dies auch aus $adb'=\pi-ada'$ folgt.

§. 12.

Aufgabe. Die Entfernung der Pole zweier Kreise auf der Kugelfläche zu bestimmen.

Auflösung. Es seyen acb, a'cb' (Figur 8.) zwei

Kreiſe; die Pole des erſten d″, δ; die des zweiten d′, δ′. Da jeder Kreis zwei Pole hat, ſo ſind vier Polabſtände vorhanden, d″d′, d″δ′, δδ′, δd′, unter denen d″d′ = δδ′, als Gegenbogen, und d′d″ + d′δ = δ′δ + δ′d″ = π, durch einen, alſo jeder der übrigen beſtimmt iſt. Es findet alſo auch hier, wenn man ſchlechthin von der Polentfernung zweier Kreiſe ſpricht, dieſelbe Unbeſtimmtheit ſtatt, wie oben bei den Winkeln der Kreiſe. Wenn wir indeß auch die Pole in poſitive und negative unterſcheiden, und zwar den auf der poſitiven Seite der Kreisebne liegenden als den poſitiven, und die Entfernung der poſitiven Pole als die abſolute Polentfernung nehmen; ſo erhält die Aufgabe völlige Beſtimmtheit.

Dies vorausgeſetzt, ſeyen δ, δ′ die poſitiven Pole der Kreiſe. Ihr Abſtand δδ′ = d″d′ iſt = d″b + bd′ = d″b + b′d′ − bb′ = r + r′ − bb′; für ſich nicht treffende Kreiſe iſt d″d′ = r + r′ + bb′; für Kreiſe, die ſich berühren, d″d′ = r + r′. Dieſelben Werthe fanden wir oben (§. 11. Zuſ. 7.) für den Nebenwinkel des von den Kreiſen gebildeten Neigungswinkels.

Alſo iſt die Entfernung der Pole zweier Kreiſe dem Supplement ihres Winkels gleich.

Zuſatz. Bezeichnen wir alſo die Seiten einer Kreisebne mit A, $\overline{A}$; die einer zweiten mit B, $\overline{B}$; die Pole der Kreiſe mit α, $\overline{\alpha}$; β, $\overline{\beta}$; ſo iſt $AB + \alpha\beta = A\overline{B} + \alpha\overline{\beta} = \overline{A}B + \overline{\alpha}\beta = \overline{A}\overline{B} + \overline{\alpha}\overline{\beta} = \pi$.

§. 13.

Aufgabe. Es iſt ein Kreis gegeben; man ſoll einen zweiten Kreis beſchreiben, der mit dem erſten einen gegebenen Winkel macht.

Auflöſung. Es ſey acb (Figur 8.) der gegebene Kreis und der gegebene Winkel = w. Von dem Mittelpunkte d″ des Kreiſes acb aus nehme man in beliebiger Richtung in einer Entfernung = π − w einen zweiten Punkt d′ und be-

ſchreibe um d' einen Kreis a'cb' von beliebigem Radius, welcher der Aufgabe genügen wird.

Beweis. Da die Polentfernung beider Kreiſe $=d''d' = \pi - w$ und der Winkel der Kreiſe dem Supplement jener gleich iſt, ſo iſt derſelbe $= w$.

Zuſatz 1. Beſchreibt man um d als Mittelpunkt einen Kreis, deſſen Radius $= dd'$, ſo kann jeder Punkt in der Peripherie deſſelben für d' genommen werden; außerhalb derſelben aber kann d' nicht liegen. Daraus folgt:

Die Mittelpunkte aller der Kreiſe, welche mit einem gegebenen Kreiſe einerlei Winkel w machen, bilden wieder einen Kreis, deſſen Mittelpunkt der des gegebenen und deſſen Radius das Supplement von w iſt.

Zuſatz 2. Iſt der gegebene Kreis der Hauptkreis ABC (Figur 11.), ſo liegen die (poſitiven und negativen) Pole aller Kreiſe, die mit ABC einen Winkel $=$ PD machen, in den gleichen Parallelkreiſen DEF, D'E'F', welche um P, P', die Pole von ABC, mit dem Radius $=$ PD $=$ P'D' beſchrieben werden.

Denn jeder hat zugleich als Radius PD' $=$ P'D, die Supplemente von PD.

Von den ſphäriſchen Dreiecken und Polygonen.

§. 14.

Erklärung. Ein ſphäriſches Dreieck iſt ein von drei Bogen dreier verſchiedenen Hauptkreiſe eingeſchloſſener Theil der Kugelfläche. Wird von mehr als drei Bogen eben ſo vieler verſchiedenen Hauptkreiſe ein Theil der Kugelfläche begränzt, ſo iſt er ein ſphäriſches Polygon, deſſen, ſo wie des ſphäriſchen Dreieckes Seiten jene einſchließenden Bo-

gen sind. Die Prädikate gleichseitig, gleichwinklig, ungleichseitig, regelmäßig u. s. w. kommen diesen Figuren in demselben Sinne zu, wie den gleichnamigen ebnen.

Zusatz 1. In einem sphärischen Dreiecke kann keine Seite ein Halbkreis seyn. Denn ist unter den Bogen (Figur 12.) AC, CB, AB der letzte ein Halbkreis, so sind A und B Gegenpunkte; der durch A und C gelegte Hauptkreis geht also auch durch B und es sind AC, CB nicht Bögen verschiedener Kreise, sondern ACB ebenfalls ein Halbkreis, der mit dem andern die Spindel ACDB bildet.

So kann auch kein Winkel des Dreieckes zwei rechten Winkeln gleich seyn.

Obwohl sphärische Dreiecke möglich sind mit einer Seite und einem Winkel, die das Maaß eines Halbkreises übersteigen; so läßt sich die Betrachtung derselben doch auf solche zurückführen, in denen jede Seite, so wie jeder Winkel kleiner als ein Halbkreis ist, auf welche wir uns daher allein beschränken. — Dasselbe gilt von allen sphärischen Polygonen.

Zusatz 2. Die Spitzen eines sphärischen Dreieckes oder Polygones können nicht alle mit dem Mittelpunkt der Kugel in einer Ebne liegen, weil sonst sämmtliche Seiten in einem Hauptkreise liegen, die ganze Figur also nur ein Kreis seyn würde.

Daher schneidet jede durch die Ecken eines sphärischen Dreieckes, oder, wenn es möglich ist, eines sphärischen Polygones gelegte Ebne die Kugelfläche in einem Nebenkreise.

Anmerk. Da die Ebnen der Kreise, deren Bogen ein sphärisches Dreieck oder Polygon bilden, im Mittelpunkte der Kugel zusammentreffen, so bilden sie einen körperlichen Winkel von eben so viel Seiten als die Figur auf der Kugelfläche hat, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, dessen Seitenwinkel durch die Seiten des sphärischen Polygones gemessen werden und dessen Neigungswinkel dieselben des sphärischen Polygones sind.

§. 15.

Erklärung. Das sphärische Polygon, welches durch die Pole der Seiten eines sphärischen Polygones gebildet wird, heißt das **Polarpolygon** desselben.

Unter den Polen sind hier diejenigen gemeint, welche auf den dem innern Raume des Polygones zugekehrten Seiten der Bogen liegen, welche das Polygon bilden. Nennen wir diese innern Seiten der Bogen die positiven, so sind die Pole die positiven, wie oben §. 12.

Lehrsatz. Die Polarität der sphärischen Polygone ist gegenseitig, d. h. ist ein Polygon P das Polarpolygon eines andern P', so ist auch P' das Polarpolygon von P.

Beweis. Es sey abcde.... (Figur 13.) ein sphärisches Polygon (P) und die (positiven) Pole von ab, bc, cd,..... seyen bezüglich α, β, γ,.... Verbindet man diese durch Bogen $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$...., zu einem Polygone (P'), so ist (nach §. 9. Zus.) b der Pol von $\alpha\beta$; c von $\beta\gamma$; d von $\gamma\delta$ u. s. w., also die Winkelpunkte von P auch die Pole von P'.

§. 16.

Lehrsatz. Zwischen den Polarpolygonen findet die Beziehung statt, daß die Seiten des einen die Supplemente der Winkel des andern sind.

Beweis. Da die Entfernung zweier Pole das Supplement des Winkels ist, welchen ihre Kreise bilden (§. 12.), so sind (Figur 13.) $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$..... bezüglich die Supplemente der Winkel b, c, d.... Und da die Punkte b, c, d,... die Pole von $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$... sind, so sind aus demselben Grunde bc, cd, de.... die Supplemente der Winkel β, γ, δ,....; also die Seiten jedes Polygones die Supplemente der Winkel des andern.

Anmerk. 1. Unter den Polygonen sind hier die Dreiecke mit begriffen.

Anmerk. 2. Je größer die Zahl der Seiten eines sphärischen Polygones wird, desto mehr nähert es sich einer sphärischen Kurve.

Daher muß es auch Polarkurven geben, d. h. solche Kurven, deren Punkte die Elemente einer andern Kurve sind, welche Elemente als Theile eines Hauptbogens (des Berührungskreises) betrachtet werden.

Daß auch hier die Polarität gegenseitig ist und daß jede zwei Polarkurven von einerlei Form sind, wird im dritten Theile gezeigt werden.

§. 17.

Bezeichnen wir die Ecken eines sphärischen Dreiecks mit α, β, γ; deren Gegenpunkte mit $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$; so schneiden sich die Hauptkreise, deren Bogen die Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ sind, auch in $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ und geben somit sechs Durchschnittspunkte, von denen je zwei Gegenpunkte sind. Da unter den Ecken eines sphärischen Dreiecks keine Gegenpunkte vorkommen dürfen (§. 14. Zus. 1.), so können obige drei Systeme von Punkten, nämlich $(\alpha, \overline{\alpha})$; $(\beta, \overline{\beta})$; $(\gamma, \overline{\gamma})$; nur so zu Dreiecken verbunden werden, daß aus jedem nur ein Punkt zu zwei der übrigen genommen wird.

Daher finden sich die möglichen Kombinationen jener sechs Punkte zu Dreiecken durch Entwickelung des Produktes $(\alpha+\overline{\alpha})\,(\beta+\overline{\beta})\,(\gamma+\overline{\gamma})$, nämlich $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\overline{\gamma}$; $\alpha\overline{\beta}\gamma$, $\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma}$; $\overline{\alpha}\beta\gamma$, $\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma}$; $\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma$, $\overline{\alpha}\overline{\beta}\overline{\gamma}$.

Es sind also mit einem Dreiecke stets sieben andre verbunden, die wir näher betrachten wollen. Zu dem Ende sey (Figur 14.) $\alpha\beta\gamma$ ein sphärisches Dreieck, dessen Hauptkreise sich in den Gegenpunkten $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ zum zweitenmale schneiden. Verwechseln wir γ mit $\overline{\gamma}$, so haben wir das Dreieck $\alpha\beta\overline{\gamma}$, welches die Seite $\alpha\beta$ mit $\alpha\beta\gamma$ gemein hat; die andern

Seiten $\alpha\overline{\gamma}$, $\beta\overline{\gamma}$ aber sind die Supplemente von $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$. Die Vergleichung der Winkel beider Dreiecke ergiebt: $\alpha\gamma\beta = \alpha\overline{\gamma}\beta$; $\gamma\alpha\beta$ = Supplement von $\overline{\gamma\alpha\beta}$; $\gamma\beta\alpha$ = Supplement von $\overline{\gamma\beta\alpha}$.

Bezeichnen wir also die Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ mit a, b, c, und zwar die einer Ecke gegenüberliegende Seite mit dem entsprechenden Buchstaben, ($\gamma\beta$ mit a, $\gamma\alpha$ mit b u. s. w.); ferner die Winkel mit A, B, C und zwar jeden Winkel mit dem seinem Scheitelpunkte entsprechenden Buchstaben ($\gamma\alpha\beta$ mit A u. s. w.); so läßt sich das Dreieck darstellen durch die Form

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\\ a\,b\,c\\ A\,B\,C\end{matrix}\right\}.$$

Deuten wir noch die Supplemente der Seiten und Winkel durch horizontale Striche über deren Buchstaben an, z. B. das Supplement von a durch $\overline{a}$, das von A durch $\overline{A}$; so wird das Dreieck $\alpha\beta\overline{\gamma}$ dargestellt durch

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\overline{\gamma}\\ \overline{a}\,\overline{b}\,c\\ \overline{A}\,\overline{B}\,C\end{matrix}\right\}.$$

Es gehen also bei Verwechselung einer Ecke des Dreieckes mit ihrem Gegenpunkte die nicht unter derselben stehenden Seiten und Winkel in ihre Supplemente über. Daher haben wir an dem Dreiecke $\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\\ a\,b\,c\\ A\,B\,C\end{matrix}\right\}$ die anliegenden Dreiecke: $\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\overline{\gamma}\\ \overline{a}\,\overline{b}\,c\\ \overline{A}\,\overline{B}\,C\end{matrix}\right\}$; $\left\{\begin{matrix}\alpha\overline{\beta}\gamma\\ \overline{a}\,b\,\overline{c}\\ \overline{A}\,B\,\overline{C}\end{matrix}\right\}$; $\left\{\begin{matrix}\overline{\alpha}\beta\gamma\\ a\,\overline{b}\,\overline{c}\\ A\,\overline{B}\,\overline{C}\end{matrix}\right\}$.

Nach demselben Verwandlungsgesetze wird man aus $\alpha\beta\overline{\gamma}$ durch Vertauschung von β mit $\overline{\beta}$ das Dreieck $\left\{\begin{matrix}\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma}\\ a\,\overline{b}\,\overline{c}\\ A\,\overline{B}\,\overline{C}\end{matrix}\right\}$

herleiten, welches dieſelben Seiten und Winkel wie $(\overline{\alpha\beta\gamma})$ hat. Wie ſonach $(\alpha\beta\overline{\gamma})=\overline{\alpha\beta\gamma}$; ſo iſt auch $(\overline{\alpha\beta\overline{\gamma}})=(\alpha\beta\gamma)$; und $(\overline{\alpha\beta}\gamma)=(\alpha\beta\overline{\gamma})$; endlich noch $\overline{\alpha\beta\gamma}=\alpha\beta\gamma$.

Unter den acht Dreiecken, welche durch drei Hauptkreiſe gebildet werden, ſind alſo je zwei einander nach ihren Seiten und Winkeln gleich; nämlich

$$\alpha\beta\gamma=\overline{\alpha\beta\gamma};$$
$$\alpha\beta\overline{\gamma}=\overline{\alpha\beta}\gamma;$$
$$\alpha\overline{\beta}\gamma=\overline{\alpha}\beta\overline{\gamma};$$
$$\overline{\alpha}\beta\gamma=\alpha\overline{\beta}\overline{\gamma};$$

bemerken wir dabei noch, daß in jedem Paare gleicher Dreiecke die Ecken des einen die Gegenpunkte der Ecken im andern, folglich auch die Seiten des einen die Gegenbogen der Seiten im andern ſind; ſo können wir ſolche füglich Gegendreiecke nennen.

Jedes ſphäriſche Dreieck iſt alſo ſeinem Gegendreieck nach Seiten und Winkeln gleich.

Da mit jedem ſphäriſchen Dreiecke auch ſein Polardreieck gegeben iſt, ſo ſind mit einem Dreiecke ſtets acht verſchiedene Dreiecke gegeben. Bezeichnen wir nämlich die Pole der Seiten eines Dreiecks mit α', β', γ'; deren Gegenpunkte mit $\overline{\alpha'}$, $\overline{\beta'}$, $\overline{\gamma'}$; ſo ſind dieſe acht Dreiecke folgende:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\\ abc\\ ABC\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\overline{\gamma}\\ ab\overline{c}\\ AB\overline{C}\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\alpha\overline{\beta}\gamma\\ a\overline{b}c\\ A\overline{B}C\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\overline{\alpha}\beta\gamma\\ \overline{a}bc\\ \overline{A}BC\end{matrix}\right\};$$
$$\left\{\begin{matrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}\\ \overline{a}\overline{b}\overline{c}\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\alpha'\beta'\overline{\gamma'}\\ \overline{A}\overline{B}C\\ \overline{a}\overline{b}c\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\alpha'\overline{\beta'}\gamma'\\ \overline{A}B\overline{C}\\ \overline{a}b\overline{c}\end{matrix}\right\};\ \left\{\begin{matrix}\overline{\alpha'}\beta'\gamma'\\ A\overline{B}\overline{C}\\ a\overline{b}\overline{c}\end{matrix}\right\};$$

wo die unter einander ſtehenden Dreiecke Polardreiecke ſind.

§. 18.

Auch jedes ſphäriſche Polygon hat ſein Ge-

genpolygon, das mit ihm einerlei Seiten und Winkel hat.

Denn sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ die Ecken eines sphärischen Polygones, in der angegebenen Reihe auf einanderfolgend, und $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}, \ldots\ldots$ deren Gegenpunkte; so ist das sphärische Dreieck $\overline{\alpha\beta\gamma}$ das Gegendreieck von $\alpha\beta\gamma$; daher Winkel $\overline{\beta} = \beta$; eben so sind $\overline{\beta\gamma\delta}$ und $\beta\gamma\delta$ Gegendreiecke, mithin Winkel $\overline{\gamma} = \gamma$ u. s. w. Die Seiten aber $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\delta}$, $\overline{\delta\varepsilon}\ldots\ldots$ sind den Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$,... als Gegenbogen gleich. —

Anmerk. Die Radien vom Mittelpunkte der Kugel nach den Ecken zweier sphärischen Gegenpolygone bilden zwei körperliche Winkel, die wie Doppelkegel mit ihren Spitzen einander gegenüberliegen. Da je zwei zu Gegenpunkten gehörige Radien einen Kugeldurchmesser und je zwei Durchmesser nur eine Ebne bilden; so werden jene körperlichen Winkel durch gemeinschaftliche Ebnen gebildet, und sowohl ihre Seitenwinkel, als ihre Neigungswinkel sind gegenseitig Scheitelwinkel. Man könnte daher solche körperliche Doppelwinkel mit Recht körperliche Scheitelwinkel nennen, die einander gleich sind, wie die ebnen Scheitelwinkel.

§. 19.

Denkt man sich (Figur 14.) das sphärische Dreieck $\overline{\alpha\beta\gamma}$ über sein Nebendreieck $\alpha\beta\overline{\gamma}$ hinweg auf sein Gegendreieck $\alpha\beta\gamma$ geschoben, so fällt $\overline{\gamma}$ auf β; $\overline{\beta}$ auf γ. Sollte auch $\overline{\alpha}$ auf α fallen, so würde $\alpha\beta = \overline{\alpha\gamma} = \alpha\gamma$, also $\alpha\beta\gamma$ ein gleichschenkliches Dreieck seyn. Da wir indeß bei allgemeiner Betrachtung die Dreiecke als ungleichseitige voraussetzen müssen, so wird im Allgemeinen $\overline{\alpha}$ nicht auf α fallen, die Deckung der Gegendreiecke also unmöglich seyn; denn an ein umgekehrtes Aufeinanderlegen, wie bei ebnen Dreiecken, ist hier nicht zu denken, weil die konvexen Oberflächen der sphärischen Dreiecke sich nicht decken.

Dieſer Umſtand, daß ſphäriſche Dreiecke, wenn gleich aus einerlei Seiten und Winkeln zuſammengeſetzt, dennoch keine Deckung zulaſſen können, erzeugt in der Lehre von der Gleichheit derſelben eine Schwierigkeit, die bei ebnen Dreiecken nicht ſtattfindet, die wir indeß umgehen können, wenn wir noch erwägen, daß ein ſphäriſches Dreieck aus dreien ſeiner Beſtandtheile (Seiten, Winkel) überhaupt nur auf zweierlei Art zuſammengeſetzt ſeyn kann. Denn ſind die Seiten eines Dreiecks a, b, c; die Winkel A, B, C und nehmen wir z. B. eine Seite mit den anliegenden Winkeln, a, B, C; ſo können B und C nur zwei Lagen haben, entweder B—a—C, oder C—a—B; ein dritter Fall iſt unmöglich. Oder nehmen wir zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel, a, b, C; ſo können die Seiten a und b nur auf zweierlei Art auf den Schenkeln des Winkels C liegen, entweder in der Ordnung a—C—b, oder b—C—a.

Daſſelbe läßt ſich von jeder Terne aus den Elementen a, b, c, A, B, C erweiſen.

Da alſo drei Stücke eines Dreiecks nur auf zweierlei Art zuſammengeſetzt ſeyn können; in Gegendreiecken aber jede drei Stücke immer auf verſchiedene Weiſe zuſammengeſetzt ſind, ſo folgt hieraus:

Sind drei Stücke eines ſphäriſchen Dreieckes T gleich dreien Stücken eines andern Dreieckes T', ſo iſt die Art ihrer Zuſammenſetzung in T' entweder wie die in T, oder wie die in dem Gegendreiecke $\overline{T}$ des letztern.

Daher läßt ſich die Gleichheit nach Seiten und Winkeln zweier ſphäriſchen Dreiecke T, T' entweder aus der unmittelbaren Kongruenz von T' mit T, oder aus der mittelbaren von T' mit $\overline{T}$ herleiten. —

Auch bei Gegenpolygonen findet die Unmöglichkeit ihrer Deckung ſtatt. Denn ſchiebt man ein Polygon $\overline{P}$, deſſen Ecken $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \ldots \overline{\varphi}, \overline{\psi}$ ſind, auf ſein Gegenpolygon P, deſſen Ecken $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varphi, \psi$ ſind, ſo daß $\overline{\alpha}$ auf α fällt,

so werden $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$, ... sich von $\overline{\alpha}$ nach der entgegengesetzten Seite reihen, wie β, γ, δ, ... an α, auf folgende Weise:

$$\alpha\beta\gamma\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\overline{\gamma\beta\alpha}$$

Aber auch hier ist klar, daß ein Polygon nur auf zweierlei Art aus seinen Seiten und Winkeln, die in gegebener Ordnung sich an einander reihen, zusammengesetzt seyn kann. Denn z. B. an die Ecke β schließen sich die Ecken α und γ, entweder in der Ordnung $\alpha\beta\gamma$, oder $\gamma\beta\alpha$. Mithin läßt sich auch die Gleichheit der sphärischen Polygone entweder auf unmittelbare Kongruenz, oder auf mittelbare durch das Gegenpolygon gründen.

Anmerk. Sphärische Dreiecke und Polygone, welche aus einerlei Seiten und Winkeln bestehen, und in denen immer gleiche Stücke sich an einander fügen, aber nach entgegengesetzten Richtungen, heißen symmetrische Dreiecke oder Polygone.

Aus dem Obigen ist klar, daß symmetrische Polygone oder Dreiecke nichts anders, als Gegenpolygone oder Gegendreiecke sind.

§. 20.

Lehrsatz. Wenn in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke einander gleich nach Seiten und Winkeln.

Beweis. In den Dreiecken (Figur 15.) ABC und A′B′C′ seyen die Seiten AB, AC den Seiten A′B′, A′C′, der Winkel A dem Winkel A′ gleich, und diese drei Stücke in beiden Dreiecken auf einerlei Art konstruirt. Man lege A′B′ auf AB, so fällt, weil A′=A, auch AC auf A′C′, C′ auf C, und die Dreiecke decken sich.

Sind aber die angeführten Stücke in den Dreiecken auf entgegengesetzte Art zusammengesetzt, wie in A′B′C′ und $\alpha\beta\gamma$, dem Gegendreieck von ABC, so ist A′B′C′ auch dem $\alpha\beta\gamma$

nach Seiten und Winkeln gleich, weil es sich mit ABC deckt.

Zusatz 1. In gleichen Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.

Zusatz 2. In jedem sphärischen Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber. Denn ist in ABC Seite AB=AC, so ist auch im Gegendreieck $\alpha\beta\gamma$ Seite $\alpha\beta=\alpha\gamma$; überdem ist Winkel C=γ; B=β. Als gleichschenkliche Dreiecke decken sich aber ABC und $\alpha\beta\gamma$, und zwar C mit β; B mit γ; aus C=γ und B=γ folgt nun C=B.

Zusatz 3. Sind alle Seiten eines sphärischen Dreiecks gleich, so sind alle Winkel gleich.

§. 21.

Lehrsatz. Wenn in zwei sphärischen Dreiecken die Seiten des einen den Seiten des andern bezüglich gleich sind, so sind es auch die Winkel.

Beweis. In den Dreiecken ABC, A′B′C′ sey AB=A′B′; AC=A′C′; BC=B′C′ und diese Seiten seyen auf entgegengesetzte Art konstruirt. Man denke sich A′B′C′ unter ABC so an dasselbe gelegt, daß A′B′ auf AB fällt; so ist in dem gleichschenklichen Dreiecke CBC′ Winkel BCC′=BC′C; in dem ebenfalls gleichschenklichen Dreieck CAC′ ist Winkel ACC′=AC′C; daher BCC′+ACC′=BC′C+AC′C d. i. Winkel ACB=A′C′B′; folglich die Dreiecke ABC und A′B′C′ gleich nach dem vorigen Lehrsatze.

Sind aber die Seiten in beiden Dreiecken auf einerlei Art konstruirt, so nehme man für das eine sein Gegendreieck.

§. 22.

Lehrsatz. Wenn eine Seite und die anliegenden Winkel in zwei sphärischen Dreiecken

gleich sind, so sind die Dreiecke nach Seiten und Winkeln einander gleich.

Beweis. Es sey in den Dreiecken $\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ abc\\ ABC\end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ a'b'c'\\ A'B'C'\end{Bmatrix}$ Seite $c=c'$, Winkel $A=A'$; $B=B'$. In ihren Polardreiecken $\begin{Bmatrix}abc\\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}\\ \overline{a}\overline{b}\overline{c}\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}a'b'c'\\ \overline{A}'\overline{B}'\overline{C}'\\ \overline{a}'\overline{b}'\overline{c}'\end{Bmatrix}$ ist dann $\overline{A}=\overline{A}'$; $\overline{B}=\overline{B}'$ und $\overline{c}=\overline{c}'$, also zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gleich, daher auch $\overline{a}=\overline{a}'$; $\overline{b}=\overline{b}'$; $\overline{C}=\overline{C}'$; woraus $a=a'$; $b=b'$; $C=C'$ folgt.

Zusatz 1. Hat ein sphärisches Dreieck zwei gleiche Winkel, so sind auch die denselben gegenüberstehenden Seiten einander gleich. Denn aus $A=B$ im Dreieck $\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ abc\\ ABC\end{Bmatrix}$ folgt $\overline{A}=\overline{B}$ im Polardreieck $\begin{Bmatrix}abc\\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}\\ \overline{a}\overline{b}\overline{c}\end{Bmatrix}$ daher $\overline{a}=\overline{b}$ (§. 20. Zus. 2.); woraus sich $a=b$ ergiebt.

Zusatz 2. Ein gleichwinkliches sphärisches Dreieck ist auch ein gleichseitiges.

§. 23.

Lehrsatz. Sind die Winkel zweier sphärischen Dreiecke bezüglich gleich, so sind es auch die Seiten derselben.

Beweis. Wenn in den Dreiecken $\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ a\,b\,c\\ ABC\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}\alpha'\beta'\gamma'\\ a'\,b'\,c'\\ A'B'C'\end{Bmatrix}$ $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$ ist; so ist in den Polardreiecken $\begin{Bmatrix}a\,b\,c\\ \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\\ \overline{\alpha}\,\overline{\beta}\,\overline{\gamma}\end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix}a'\,b'\,c'\\ \overline{A}'\,\overline{B}'\,\overline{C}'\\ \overline{\alpha}'\,\overline{\beta}'\,\overline{\gamma}'\end{Bmatrix}$ derselben $\overline{A}=\overline{A}'$; $\overline{B}=\overline{B}'$; $\overline{C}=\overline{C}'$; also die Polardreiecke ihren Seiten, mithin auch ihren Winkeln nach gleich. (§. 21.) Aus $\overline{a}=\overline{a}'$, $\overline{b}=\overline{b}'$, $\overline{c}=\overline{c}'$ folgt dann $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$.

§. 24.

Lehrsatz. Die Summe der Seiten eines sphärischen Dreieckes ist kleiner als ein Hauptkreis.

Beweis. Man lege durch die Ecken des Dreieckes ABC (Figur 17.) eine Ebne, welche die Kugelfläche in dem Nebenkreise AbCaBc schneidet. (§. 14. Zus. 2.) Da unter den Kreisbogen zwischen zwei Punkten der Kugelfläche der Bogen des Hauptkreises der kürzeste ist (§. 6. Zus. 1.), so ist Seite $AC<AbC$; $AC<BaC$; $AB<AcB$; daher die Summe aller Seiten kleiner als der Umfang des Nebenkreises, um so mehr also kleiner als der Hauptkreis.

Zusatz 1. Wie im Dreiecke $\begin{Bmatrix}\alpha\beta\gamma\\ a\,b\,c\\ ABC\end{Bmatrix}$ $a+b+c<2\pi$ ist, so ist auch im Nebendreieck $\begin{Bmatrix}\overline{\alpha}\,\beta\,\gamma\\ a\,\overline{b}\,\overline{c}\\ A\,\overline{B}\,\overline{C}\end{Bmatrix}$ $a+\overline{b}+\overline{c}<2\pi$.

Addirt man hier auf beiden Seiten $b+c$, so ist $a+2\pi<2\pi+b+c$; daher $a<b+c$. In Worten: Die Sum-

me zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes ist größer, als die dritte Seite.

Zusatz 2. Aus $b+c>a$ folgt $b>a-c$, d. h. jede Seite des sphärischen Dreieckes ist größer als die Differenz der beiden andern.

Zusatz 3. Auf das Polardreieck $\left\{\begin{matrix} a\,b\,c \\ \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \\ \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} \end{matrix}\right\}$ angewendet, giebt der Lehrsatz $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}<2\pi$, d. i. $\pi-A+\pi-B+\pi-C<2\pi$, woraus $\pi<A+B+C$ folgt. Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks ist also stets größer als zwei Rechte.

Da jeder Winkel $<\pi$, so ist $A+B+C<3\pi$; also π und 3π die Grenzen der Winkelsumme.

Die Grenzen der Seitensumme ist 0 und 2π; der Abstand beider Grenzen also gleich.

Zusatz 4. Wie im Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ nach Zus. 2. $A+B+C>\pi$ ist, so ist im Nebendreiecke $\overline{\alpha}\overline{\beta}\gamma$ auch $A+\overline{B}+\overline{C}>\pi$, d. i. $A+\pi-B+\pi-C>\pi$, woraus $A+\pi>B+C$ folgt. Die Summe zweier Winkel übertrifft den dritten um weniger als zwei Rechte.

Zusatz 5. Aus $\pi<A+B+C$ folgt $\pi-A<B+C$, d. i. $\overline{A}<B+C$; und aus $\pi>A+B-C$ (Zus. 4.) folgt $\pi-A>B-C$, oder $\overline{A}>B-C$.

In Worten: Der Außenwinkel ($\overline{A}$) eines sphärischen Dreiecks (d. h. der Nebenwinkel eines Winkels im Dreieck) ist kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der beiden innern Winkel (B, C) des Dreieckes, welche ihm gegenüber liegen.

Zusatz 6. Die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks ist auch größer als die Summe zweier Bogen, welche von einem Punkte innerhalb des Dreiecks nach den Endpunkten der dritten Seite gezogen werden. Denn sind

im Dreieck ABC (Figur 18.) DA, DB solche Bogen, so verlängere man AD bis an BC, die es in E trifft. Im Dreieck AEC ist dann AC+CE>AD+DE (Zus. 1.); im Dreieck BED ist DE+EB>DB; daher, wenn beide Ungleichungen addirt und DE auf beiden Seiten subtrahirt wird AC+CB+>AD+DB.

Was den Winkel x betrifft, so ist er <C+y+z, aber >C—(y+z). Denn es ist x<u+y; und x>u—y; (Zus. 5.) eben so u<C+z und u>C—z, daher x<C+y+z und x>C—(y+z).

§. 25.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck steht dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

Fig 18

Beweis. Es sey im Dreieck ABC der Winkel B>A. Macht man durch den Bogen DB den Winkel DBA=A, so ist AD=DB. (§. 22. Zus. 1.). In dem Dreieck BCD ist DB+DC>CB, daher AD+DC, d. i. AC>CB.

Zusatz 1. Auch steht der größern Seite der größere Winkel gegenüber. Denn ist AC>CB, so kann nicht A=B seyn, wegen (§. 22. Zus. 1.); auch kann nicht A>B seyn, wegen des eben bewiesenen Lehrsatzes. Daher muß A<B seyn.

Anmerk. Das Polardreieck würde dasselbe Resultat auf directem Wege geben.

Zusatz 2. Je nachdem die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks größer, oder kleiner, oder eben so groß ist, als ein Halbkreis, ist auch die Summe der gegenüber liegenden Winkel größer, kleiner, oder eben so groß als zwei Rechte.

Denn ist im Dreieck $\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\\ abc\\ ABC\end{matrix}\right\}$ $a+b\gtreqless\pi$, so ist $a\gtreqless\pi-b$, oder $a\gtreqless\overline{b}$; also im Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\overline{\alpha}\beta\gamma\\ a\overline{b}\overline{c}\\ A\overline{B}\overline{C}\end{matrix}\right\}$ auch $A\gtreqless\overline{B}$ (§. 25. Zus. 1. und §. 20. Zus. 2.), oder $A\gtreqless\pi-B$; daher $A+B\gtreqless\pi$.

Zusatz 3. Umgekehrt: Je nachdem die Summe zweier Winkel eines sphärischen Dreieckes größer, eben so groß, oder kleiner als zwei Rechte ist, ist auch die Summe der gegenüberstehenden Seiten größer, eben so groß, oder kleiner als ein halber Hauptkreis.

§. 26.

Die so eben entwickelten merkwürdigen Eigenschaften des sphärischen Dreieckes führen auf andre nicht minder wichtige Folgerungen, zu deren Entwickelung wir Folgendes vorausschicken:

I. Lehnsatz. 1) Wenn die Summe zweier Bogen (oder Winkel) kleiner als π ist, so ist der kleinere $<\frac{\pi}{2}$;

2) ist die Summe $>\pi$, so muß der größere $>\frac{\pi}{2}$ seyn;

3) zweideutig ist im ersten Falle der größere, im zweiten Falle der kleinere;

4) in beiden Fällen aber ist der zweideutige

Bogen dem Quadranten näher, als der andere.

Beweis. Die Richtigkeit von 1), 2), 3) fällt in die Augen.

Was 4) betrifft, so sey

a) für den ersten Fall der größere Bogen $=AB$ (Figur 20.) und $A'B'=AB$ gemacht. Der kleinere Bogen muß also $<AB$, folglich entfernter vom Quadranten AC seyn. Ist der größere Bogen $>\frac{\pi}{2}$, etwa $=AB'$, so muß der Voraussetzung in 1) wegen der kleinere $<A'B'$, also ebenfalls entfernter vom Quadranten seyn.

b) Für den zweiten Fall sey der kleinere Bogen AB oder AB'; der andere muß nicht nur $>\frac{\pi}{2}$, sondern auch größer, als AB', also ebenfalls entfernter vom Quadranten seyn.

II. Eine ähnliche Betrachtung giebt die Richtigkeit der Umkehrung: Wenn von zwei Bogen φ, ψ der eine, φ, dem Quadranten näher ist, als der andere, ψ; so muß

1) wenn $\varphi+\psi<\pi$ ist, ψ der kleinere und $<\frac{\pi}{2}$ seyn;

2) wenn $\varphi+\psi>\pi$ ist, ψ der größere und größer als ein Quadrant seyn.

Denn es sey $\varphi=AB$ oder AB' und

1) $\varphi+\psi<\pi$. Wäre nun $\psi>\frac{\pi}{2}$, so müßte ψ auch $>AB'$, also $\varphi+\psi>\pi$ seyn, gegen die Voraussetzung. Wäre $\psi=\frac{\pi}{2}$, so wäre φ nicht dem Quadranten näher. Also kann ψ nur $<\frac{\pi}{2}$, und muß demnach auch $<\varphi$ seyn.

2) Es sey $\varphi+\psi>\pi$. Wäre $\psi<\frac{\pi}{2}$, so müßte er $<AB$; also $\varphi+\psi<\pi$ seyn, was mit der Voraussetzung streitet; eben so wenig kann $\psi=\pi$ seyn. Daher muß $\psi<\frac{\pi}{2}$, und der größere Bogen seyn.

§. 27.

Diese Sätze auf die Seiten und Winkel des sphärischen Dreieckes angewendet, ergeben Folgendes:

1) Wenn zwei Seiten a, b eines sphärischen Dreieckes so beschaffen sind, daß $a+b<\pi$, und $a<b$ ist; so ist a kleiner als der Quadrant. Zugleich ist aber auch $A+B<\pi$ und $A<B$, daher auch $A<\frac{\pi}{2}$; also sind a und A *gleichartig*.

2) Wenn $a+b>\pi$ und $a>b$ ist, so ist $a>\frac{\pi}{2}$; dann ist auch $A+B>\pi$ und $A>B$, daher auch $A>\frac{\pi}{2}$; also a und A gleichartig.

Da in beiden Fällen b und B dem Quadranten näher sind, als a und A (§. 26.), so folgt wegen 26. II. hieraus der Satz:

Wenn von zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes die eine ihrer Größe nach vom Quadranten entfernter ist, als die andere, so ist sie mit dem gegenüberliegenden Winkel gleichartig.

Wenden wir dies auf alle drei Seiten des Dreieckes an, und nehmen c als die dem Quadranten nächste Seite, so folgt aus der Vergleichung 1) von c mit a, 2) von c mit b, daß a und b mit ihren gegenüberliegenden Winkeln gleichartig sind.

Also sind in jedem sphärischen Dreiecke wenigstens zwei Seiten gleichartig mit den gegenüberliegenden Winkeln, und zwar diejenigen, welche von dem Quadranten entfernter als die dritte Seite sind.

Der Reziprozität der Sätze in §. 25. Zus. 2. und Zus. 3. wegen lassen sich in obigen Schlüssen die Seiten mit den Winkeln verwechseln, und es ergeben sich die Umkehrungen:

Von zwei Winkeln eines sphärischen Dreieckes ist der von dem Rechten entferntere mit der gegenüberliegenden Seite gleichartig;

und:

In jedem sphärischen Dreiecke sind wenigstens zwei Winkel und zwar diejenigen, welche vom Rechten entfernter sind als der dritte Winkel, mit ihren gegenüberliegenden Seiten gleichartig.

Anmerk. Daß die dritte Seite mit dem dritten Winkel im Allgemeinen sowohl gleichartig als ungleichartig seyn kann, zeigt eine einfache Betrachtung. Man kann nämlich den Schenkeln AC, AB, eines Winkels CAB, deren Summe nicht größer als ein Quadrant ist, jede beliebige Oeffnung, stumpfwinkliche und spitzwinkliche, geben, während die Endpunkte B, C der Schenkel um weniger als die Summe der beiden Schenkel, also um weniger als einen Quadranten von einander entfernt sind. (§. 24 Zus. 1.)

Nimmt man statt der Summe die Differenz der beiden Schenkel AB, AC nicht kleiner als $\frac{\pi}{2}$, so bleibt BC immer größer als $\frac{\pi}{2}$ (§. 24. Zus. 2.), während jene Schenkel spitze und stumpfe Winkel bilden können.

Zusatz 1. Aus der Reziprozität der entwickelten Sätze folgt, daß der dem Quadranten näheren Seite auch der dem Rechten nähere Winkel gegenüberstehe; und umgekehrt. Hier-

aus aber folgt: ſind zwei Seiten gleich weit vom Quadranten entfernt, ſo ſind es auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel; und umgekehrt.

Zuſatz 2. Iſt unter den Winkeln des ſphäriſchen Dreieckes einer ein rechter, oder unter den Seiten eine gleich dem Quadranten, ſo ſind dieſe dem rechten Winkel oder Quadranten am nächſten; daher müſſen im rechtwinklichen Dreieck, ſo wie in demjenigen, das einen Quadranten als Seite hat (Quadrantendreieck), die übrigen Seiten mit den gegenüberliegenden Winkeln gleichartig ſeyn.

Zuſatz 3. Iſt in einem ſphäriſchen Dreiecke eine Seite ein Quadrant und ein anliegender Winkel ein rechter, ſo ſind auch die dieſen gegenüberliegenden Stücke ein rechter Winkel und ein Quadrant. Denn es ſey $a=\frac{\pi}{2}$ und $B=\frac{\pi}{2}$. Wegen $a=\frac{\pi}{2}$ iſt b gleichartig mit B (Zuſ. 2.), alſo $b=\frac{\pi}{2}$; wegen $B=\frac{\pi}{2}$ iſt A gleichartig mit a, alſo $A=\frac{\pi}{2}$; folglich ſowohl b als $A=\frac{\pi}{2}$. —

Daher ſind alle drei Seiten Quadranten und alle Winkel rechte, wenn eine Seite mit den anliegenden Winkeln, oder zwei Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel Quadranten und Rechte ſind.

Zuſatz 4. Sind zwei Seiten dem Quadranten gleich nahe und zugleich näher als die dritte, ſo ſind alle Seiten mit den gegenüberliegenden Winkeln gleichartig.

Denn ſind b und c dem Quadranten gleich nahe, ſo iſt entweder $b=c$, oder $b+c=\pi$. Je nachdem nun $b\lessgtr c$, iſt auch $B\lessgtr C$, und je nachdem $b+c\lessgtr\pi$, iſt auch B+

$C \lessgtr \pi$. Also müssen b, c mit B, C gleichartig seyn; a ist nach der Hypothesis mit A gleichartig, also alle Seiten mit den gegenüberliegenden Winkeln gleichartig.

Hieraus folgt: Wenn zwei Seiten Quadranten sind, so sind die gegenüberliegenden Winkel rechte; daher alle Winkel rechte seyn müssen, wenn alle Seiten Quadranten sind. — Die Umkehrung hiervon bedarf keiner Auseinandersetzung.

Zusatz 5. Ist eine Seite ein Quadrant und der gegenüberliegende Winkel ein rechter, so ist wenigstens noch eine Seite ein Quadrant. Denn es sey (Figur 21.) im Dreieck ABC Seite CB ein Quadrant, A ein rechter Winkel und AC sey kein Quadrant. Dann sey $AD = \frac{\pi}{2}$, wo D der Pol von AB ist. (§. 8. Zus. 4.) Zieht man den Quadranten DB, so ist Winkel CDB ein rechter (Zus. 4.) und daher AB ein Quadrant. (Zus. 3.)

§. 28.

Lehrsatz. Sind alle Winkel eines sphärischen Dreieckes spitze, so sind alle Seiten kleiner als Quadranten.

Beweis. Es seyen im Dreieck ABC (Figur 22.) alle Winkel spitze und B der größte. Da er zugleich der dem Rechten nächste ist, so sind die Seiten AB, BC den gegenüberliegenden Winkeln gleichartig, folglich kleiner als Quadranten; also ist nur zu beweisen, daß $AC < \frac{\pi}{2}$ sey.

Wäre $AC > \frac{\pi}{2}$, so sey $AC' = \frac{\pi}{2}$; zugleich auch $AB' = \frac{\pi}{2}$. Dann sind AB'C' und AC'B' rechte Winkel (§. 27. Zus. 4.) und B'C' mit A gleichartig (Zus. 2.), also B'C'

$< \frac{\pi}{2}$. In dem an B' rechtwinklichen Dreiecke BB'C' ist B'BC' gleichartig mit B'C', also auch $B'BC' < \frac{\pi}{2}$; daher $ABC' > \frac{\pi}{2}$ und um so mehr $ABC > \frac{\pi}{2}$; gegen die Voraussetzung. Also kann AC nicht $> \frac{\pi}{2}$ seyn.

Wäre $AC = \frac{\pi}{2}$, so folgt aus dem an B' rechtwinklichen Dreiecke BB'C eben so wie vorhin, daß B'BC gleichartig mit BC, also $< \frac{\pi}{2}$, und also $ABC > \frac{\pi}{2}$ seyn müßte, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Mithin ist auch $AC < \frac{\pi}{2}$.

Zusatz 1. Ist der größte Winkel ein rechter, so sind auch alle Seiten kleiner als Quadranten; denn die obigen Schlüsse ändern sich dabei nicht.

Zusatz 2. Sind alle Seiten größer als Quadranten, so sind alle Winkel stumpf. Denn ist jede der Seiten a, b, $c > \frac{\pi}{2}$; so sind $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c} < \frac{\pi}{2}$; also im Polardreieck alle Winkel spitz, daher alle Seiten $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ zu Folge des Lehrsatzes $< \frac{\pi}{2}$; mithin A, B, $C > \frac{\pi}{2}$.

Zusatz 3. Ist die kleinste Seite ein Quadrant, so sind auch alle Winkel stumpf. Dies folgt eben so mit Hülfe des Polardreieckes aus Zus. 1.

Dieser Zusätze wegen läßt sich der Satz allgemeiner so aufstellen: Ist in einem sphärischen Dreiecke der größte Winkel nicht größer als ein Rechter, so sind alle Seiten kleiner als Quadranten; ist die kleinste Seite nicht kleiner als ein Quadrant, so sind alle Winkel stumpf.

Zusatz 4. Ist in einem rechtwinklichen sphärischen Dreiecke jede Kathete $<\frac{\pi}{2}$, so ist auch die Hypotenuse $<\frac{\pi}{2}$. Denn dann ist der rechte Winkel der größte. (§. 27. Zus. 2.)

Zusatz 5. Ist jede Kathete $>\frac{\pi}{2}$, so ist ebenfalls die Hypotenuse $<\frac{\pi}{2}$; denn ist im Dreiecke $\left\{\begin{matrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\ a\,b\,c\\ A\,B\,C\end{matrix}\right\}$ A ein Rechter und b, $c>\frac{\pi}{2}$, so ist in $(\bar{\alpha}\beta\gamma)$ $\bar{b}$, $\bar{c}<\frac{\pi}{2}$. A ein Rechter, daher nach Zus. 4. $a<\frac{\pi}{2}$.

Beide Zusätze lassen sich so zusammenfassen: Sind die Katheten gleichartig, so ist die Hypotenuse $<\frac{\pi}{2}$.

Zusatz 6. Sind die Katheten ungleichartig, so ist die Hypotenuse $>\frac{\pi}{2}$. Denn ist in $(\alpha\beta\gamma)$ die Kathete $b>\frac{\pi}{2}$; $c<\frac{\pi}{2}$; so sind in $(\alpha\bar{\beta}\gamma)$ die Katheten b und $\bar{c}$ gleichartig; daher $\bar{a}<\frac{\pi}{2}$; folglich $a>\frac{\pi}{2}$.

Zusatz 7. Die Richtigkeit der Umkehrungen der Zusätze 5. und 6. fällt in die Augen.

Zusatz 8. Dieselben Zusätze auf das Polardreieck angewendet, ergeben: Sind in einem Quadrantendreiecke die Nichtquadranten gleichartig, so ist der dem Quadranten gegenüberliegende Winkel stumpf; sind jene ungleichartig, so ist er spitz; und umgekehrt.

§. 29.

Die in §. 27. und §. 28. dargestellten Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des sphärischen Dreiecks füh-

ren auf einen fünften und sechsten Satz von der Gleichheit sphärischer Dreiecke.

Lehrsatz. Zwei sphärische Dreiecke sind einander gleich, wenn zwei Seiten und der Winkel, welcher der dem Quadranten näheren Seite vom jenen beiden entgegensteht, gleich sind.

Beweis. In den Dreiecken (Figur 23.) ABC, A'B'C' sey AC=A'C'; CB=C'B'; B=B' und AC, A'C', dem Quadranten näher, als CB, C'B'.

Man lege C'B' auf CB; so fällt A'B' auf AB, weil B'=B. Der Punkt A' kann weder zwischen A und B, noch über A hinausfallen. Denn fiele A' etwa in A'', so würde CAA'' ein gleichschenkliches Dreieck, der Winkel CAA''=CA''A, also Winkel CA''B ungleichartig mit CAB seyn. — Mit beiden aber müßte Seite CB gleichartig seyn, weil in den Dreiecken CAB, CA''B, Seite CB vom Quadranten entfernter, als CA'', CA ist. Also kann A'' nicht zwischen A und B fallen. — Fiele A' über A hinaus, etwa in A'''; so würde wieder aus der Gleichheit von CA und CA''' die Ungleichartigkeit der Winkel CA'''B, CAB folgen, mit welchen beiden CB gleichartig seyn müßte. Daher muß A' auf A fallen und die Dreiecke sich decken.

Anmerk. 1. Sind die Dreiecke auf entgegengesetzte Art konstruirt, so ist für das eine sein Gegendreieck zu nehmen.

Anmerk. 2. Daß die Winkel CA''A, CA'''A, und CAA'' Rechte seyn, und somit obige Schlüsse stören könnten, ist deswegen nicht möglich, weil dann C der Pol von AB (§. 7. Zus. 2.), daher CB als Quadrant nicht entfernter vom Quadranten seyn würde, als AB.

Zusatz 1. Der Lehrsatz ist auch gültig, wenn die in demselben erwähnten Seiten (AC, BC) gleich weit vom Quadranten abstehen. Denn daß auch in diesem Falle A' nicht zwischen A und B, etwa in A'', liegen kann, steht so: Da AC und BC gleich entfernt vom Quadranten sind, so ist

entweder $AC=BC$, oder $AC+BC=\pi$; eben ſo entweder $A'C'=B'C'$, oder $A'C'+B'C'=\pi$. Iſt AC, $A'C'=BC$, $B'C'$, ſo iſt Winkel $CAB=CBA=CA''B$; und wegen $AC=A''C$ auch $CAB=CA''A$; daher müßte $CA''B=CA''A$, alſo alle genannten Winkel Rechte, C der Pol von AB und die Seiten CA, CA Quadranten ſeyn, was nicht angenommen und auch nicht anzunehmen iſt. Iſt aber $AC+BC=\pi=A'C'+B'C'$; und A' fiele in A'', ſo würde Winkel $CAB+CBA=\pi=CA''B+CBA$, mithin $CA''B=CAB$ und wegen $CAA''=CA''A$ auch $CA''B=CA''C$ alſo, wie vorhin, C der Pol von AB ſeyn. Eben ſo läßt ſich darthun, daß A' nicht über A hinausfallen kann, wie A'''. Daher iſt die Behauptung evident.

Zuſatz 2. Zwei rechtwinkliche ſphäriſche Dreiecke ſind gleich, wenn die Hypotenuſe und eine Kathete in beiden gleich ſind. (§. 27. Zuſ. 1.)

Zwei Quadrantendreiecke ſind gleich, wenn ein Nichtquadrant und der dem Quadranten gegenüberliegende Winkel gleich ſind.

§. 30.

Lehrſatz. Zwei ſphäriſche Dreiecke ſind gleich, wenn zwei Winkel und die Seite, welche dem, dem Rechten näheren von jenen Winkeln gegenüberliegt, gleich ſind.

Beweis. Iſt in den Dreiecken $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$, $A=A'$; $B=B'$; $b=b'$; und B, B' dem Rechten näher als A, A'; ſo iſt in den Polardreiecken (abc), (a'b'c') Seite $\overline{A}=\overline{A}'$; $\overline{B}=\overline{B}'$; Winkel $\overline{b}=\overline{b}'$ und $\overline{B}$, $\overline{B}'$ dem Quadranten näher, als $\overline{A}$, $\overline{A}'$, daher nach dem Vorigen dieſe Dreiecke, mithin auch ihre Polardreiecke $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha'\beta'\gamma')$ gleich.

Zuſatz 1. Der Lehrſatz iſt auch gültig, wenn die erwähnten Winkel gleich weit vom Rechten entfernt ſind. (§. 29. Zuſ. 1.)

Zusatz 2. Zwei rechtwinkliche Dreiecke sind gleich, wenn die Hypotenusen nebst einem anliegenden Winkel in beiden gleich sind.

Zwei Quadrantendreiecke sind gleich, wenn zwei Winkel, darunter der dem Quadranten gegenüberstehende, gleich sind.

§. 31.

Lehrsatz. Wenn zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes zweien Seiten eines andern gleich, der eingeschlossene Winkel des ersten aber größer, als in dem andern ist; so ist die dritte Seite des erstern größer, als die des zweiten.

Beweis. Es sey (Figur 24.) $A'C' = AC$; $C'B' = CB$; der Winkel $C' < C$. Man lege $A'C'$ auf AC, so fällt $C'B'$ zwischen CA und CB und der Punkt B entweder über, unter oder auf AB.

1) Fällt B' über AB, wie B''; so ist $CB + BA > CB'' + B''A$, folglich nach Abzug der Gleichung $CB = CB''$ auch $AB > AB''$.

2) Fällt B' unter AB, etwa in B'''; so ziehe man BB'''. In dem gleichschenklichen Dreiecke CB'''B ist Winkel $CB'''B = CBB'''$; daher $CB'''B > ABB'''$ und noch mehr, $AB'''B > ABB'''$; daher $AB > AB'''$.

3) Fällt B' auf AB, wie b; so ist klar, daß $AB > Ab$ ist.

§. 32.

Lehrsatz. Wenn in zwei sphärischen Dreiecken zwei Winkel gleich, die eingeschlossene Seite aber ungleich ist; so steht der größeren Seite ein größerer Winkel gegenüber.

Beweis. Ist $A = A'$; $B = B'$; $c > c'$; so ist in den

Polardreiecken: $\overline{A}=\overline{A'}$; $\overline{B}=\overline{B'}$; $\overline{c}<\overline{c'}$; daher nach dem vorigen Satze $\overline{C}<\overline{C'}$; woraus $C>C'$ folgt.

Zusatz. Ist in zwei rechtwinklichen Dreiecken einer der schiefen Winkel gleich, die anliegenden Katheten aber ungleich, so steht der größern Kathete ein größerer Winkel gegenüber.

§. 33.

Lehrsatz. Wenn zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes zweien Seiten eines andern gleich, die dritte Seite des ersten aber größer, als die des zweiten ist; so ist der der größern Seite gegenüberliegende Winkel größer als der der kleinern Seite im andern Dreiecke gegenüberliegende.

Beweis. Ist $a=a'$; $b=b'$; $c>c'$; so kann nicht $C<C'$ seyn, wegen §. 31.; auch kann nicht $C=C'$ seyn, wegen §. 20. Also muß $C>C'$ seyn.

§. 34.

Lehrsatz. Wenn zwei Winkel eines sphärischen Dreieckes gleich zweien Winkeln eines andern, die dritten Winkel in beiden Dreiecken aber ungleich sind, so steht dem größern dieser Winkel eine größere Seite gegenüber.

Beweis. Es sey $A=A'$; $B=B'$; $C>C'$; so kann weder $c<c'$, wegen §. 32., noch $c=c'$ seyn, wegen §. 22. Also muß $c>c'$ seyn.

Zusatz. Ist ein schiefer Winkel eines rechtwinklichen Dreieckes einem schiefen Winkel eines andern gleich, die an-

dern beiden schiefen Winkel aber ungleich; so steht dem größern eine größere Kathete entgegen.

§. 35.

Lehrsatz. Wenn in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten gleich sind, der Winkel aber, welcher der größeren und zugleich dem Quadranten näheren Seite gegenübersteht, in dem einen Dreieck größer als im andern ist; so ist die dritte Seite im ersten Dreiecke kleiner, als im andern.

Beweis. Es sey (Figur 25.) $AC=A'C'$; $AB=A'B'$; AB, A'B' größer und dem Quadranten näher als AC, A'C'; endlich $C'>C$.

Man lege A'C' auf AC, so fällt C'B' unter CB. Verlängert man AB bis sie C'B' in D schneidet, so muß B' zwischen D und C liegen. Denn läge B' jenseit D, etwa in B'', so ziehe man AB'', und B''B, welcher verlängert zwischen A und C die Seite AC trifft. Da $AC<AB''$, und vom Quadranten entfernter ist, so ist $AC<\frac{\pi}{2}$ (§. 26.) und gleichartig mit Winkel AB''C, welcher also spitz ist. Daher ist auch AB''B ein spitzer und weil $AB''=A'B'=AB$, so ist auch ABB'' ein spitzer; mithin ABE ein stumpfer; um so mehr ABC ein stumpfer. Mit ABC muß aber AC gleichartig seyn; also müßte AC mit den ungleichartigen Winkeln AB''C, ABC zugleich gleichartig seyn; was ungereimt ist. Daher kann B nicht jenseit D fallen. Eben so wenig auch auf D selbst, weil dann $AD=A'B'=AB$ wäre, was nicht seyn kann. Fällt nun B zwischen C und D, so ziehe man BB'. Wegen $AB=AB'$ ist Winkel $ABB'=AB'B$; daher $CBB'<AB'B$, und vielmehr $CBB'<CB'B$; daher ist $CB>CB'$ d. i. $B'C'<BC$.

Pol von PABP'B'. Zieht man mehrere Bogen AC, AD, AF, AG, so sind diese desto kleiner, je näher sie an dem kleinsten AB; desto größer, je näher sie an dem größten AB', dem Supplement des kleinsten AB, liegen. Denn da der Winkel ACB wie auch ADB, ein spitzer ist (§. 27. Zus. 2.); so ist ACD ein stumpfer Winkel, also ACD > ADC; mithin AD > AC. Eben so ist AG > AF; weil Winkel AGB wegen Gleichartigkeit mit der Kathete AB ein spitzer, AFG oder AFB' aber, als gleichartig mit AB', ein stumpfer ist. —

Da AE ein Quadrant ist, so sind die Bogen zwischen AB und AE kleiner als Quadranten; die zwischen AB' und AE aber größer.

Zusatz 2. Die spitzen Winkel ACB, ADB u. s. w. nehmen ab; AEB (= AB) ist ihr Minimum; jenseit des Minimums nehmen sie wieder zu, je mehr sie sich (der Lage nach) von demselben entfernen. Denn es ist z. B. 1) ACB > ADB, weil $AC < \frac{\pi}{2}$; $AD < \frac{\pi}{2}$, also $AC + AD < \pi$; mithin auch ACD + ADC < ACD + ACB ist; woraus ADC < ACB folgt. 2) Es ist AFB < AGB, weil (wegen $AF > \frac{\pi}{2}$, $AG > \frac{\pi}{2}$) $AF + AG > \pi$, daher AFG + AGF > π; dagegen AFG + AFB = π ist; woraus AGF d. i. AGB > AFB folgt.

Die stumpfen Nebenwinkel jener spitzen dagegen nehmen von B und B' nach E hin zu, wo ihr Maximum AEB' (= AB') ist.

Zusatz 3. Zu beiden Seiten des Perpendikels AB in gleichen Abständen von demselben finden sich gleiche Bogen und Winkel. Denn ist BC' = BC, so sind die Dreiecke ABC, ABC' gleich; daher AC' = AC, und die Winkel an C' denen an C gleich. Also auch auf der andern Seite des Perpendikels AB wachsen die schiefen Bogen, je mehr sie sich von dem Minimum AB entfernen, und die Winkel neh-

men nach demſelben Geſetze, wie auf der andern Seite, nach E', dem Gegenpunkte von E, hin, ab und zu.

Zuſatz 4. Von einem Punkte, der nicht Pol eines Hauptkreiſes iſt, kann auf denſelben Kreis nur ein Perpendikel auf einer Seite der Kugelfläche gezogen werden. Denn wäre außer AB etwa noch AC' ein Perpendikel, ſo würde A der Pol von EBE'B' ſeyn (§. 7. Zuſ. 2.) gegen die Annahme. Dagegen ſind ſtets zwei ſchiefe Bogen von gleicher Länge in verſchiedenen Lagen von jenem Punkte nach dem Kreiſe möglich; aber auch nur zwei. —

Das Perpendikel, und zwar das kürzeſte, wird daher als das Maaß der Entfernung eines Punktes von einem Hauptkreiſe betrachtet.

Zuſatz 5. Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken (wie ABC, ABD) eine Kathete gleich, die andere aber in dem einen Dreiecke größer, als im andern iſt, und beide Katheten $< \frac{\pi}{2}$ ſind; ſo liegt der größeren Kathete ein größerer Winkel gegenüber, auch eine größere Hypotenuſe an derſelben, aber ein kleinerer Winkel an ihr. Umgekehrt: Iſt eine Kathete in beiden Dreiecken gleich, die Hypotenuſe in dem einen größer als in dem andern, auch die Katheten jedes Dreieckes $< \frac{\pi}{2}$; ſo iſt mit der größern Hypotenuſe eine größere Kathete verbunden, welcher gegenüber ein größerer und an welcher ein kleinerer (ſchiefer) Winkel liegt.

Zuſatz 6. Zwei rechtwinkliche Dreiecke ſind einander gleich, wenn eine Kathete mit dem gegenüberliegenden Winkel gleich und die Katheten jedes Dreieckes gleichartig ſind.

Zuſatz 7. Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken von gleichen Hypotenuſen und gleichartigen Katheten, (oder: von gleichen Hypotenuſen und die $< \frac{\pi}{2}$ ſind) eine Kathete des einen Dreieckes größer als eine Kathete des andern iſt, ſo

ist die zweite Kathete des ersteren Dreieckes kleiner, als die zweite des andern.

Denn es seyen (Figur 27. b.) die Dreiecke ABC, A'B'C' an B, B' rechtwinklich, AC = A'C', und A'B' < AB. Sind nun

1) die Katheten all: $< \frac{\pi}{2}$; so mache man BA'' = A'B' und ziehe A''C. Es kann nun nicht B'C' = BC seyn, weil die Dreiecke A'B'C', ABC einander gleich seyn müßten. (§. 20.) Auch kann nicht B'C' < BC seyn; denn wäre etwa B'C' = BC'', so wäre A'C' = A''C''. Nach Zus. 5. ist aber A''C'' < A''C, und A''C < AC; also müßte A'C' < AC seyn, gegen die Voraussetzung. Folglich muß B'C' > BC seyn.

2) Sind die Katheten alle $> \frac{\pi}{2}$, so seyen die rechtwinklichen Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$; wo A, A' die rechten Winkel, und die Katheten b, c, b', c', $> \frac{\pi}{2}$ sind, und es sey b < b'. In den Nebendreiecken $\bar{\alpha}\beta\gamma$, $\bar{\alpha}'\beta'\gamma'$ sind dann die Katheten $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$, alle $< \frac{\pi}{2}$ und $\bar{b} > \bar{b}'$; also nach dem Erwiesenen $\bar{c} < \bar{c}'$; folglich in den Dreiecken $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$; c > c'.

Zusatz 8. Sind aber im vorigen Zusatze die Katheten ungleichartig, oder, was dasselbe sagt, die gleichen Hypotenusen $> \frac{\pi}{2}$; so sind die Katheten des einen Dreieckes beide zugleich kleiner oder größer, als die des andern.

Denn sind die Katheten b, b' $< \frac{\pi}{2}$; aber c, c' $> \frac{\pi}{2}$ und b < b'; so sind in den rechtwinklichen Nebendreiecken $\bar{\alpha}\beta\gamma$, $\bar{\alpha}'\beta'\gamma'$ alle Katheten gleichartig; b < b'; daher $\bar{c} > \bar{c}'$; folglich auch c < c'.

Zusatz 9. Die beiden Zusätze 8. und 9. lassen sich so zusammenfassen: Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken von gleichen Hypotenusen eine Kathete des einen Dreieckes von dem Quadranten entfernter als eine Kathete des andern ist; so ist die zweite Kathete des ersten Dreieckes dem Quadranten näher, als die zweite Kathete des andern Dreieckes.

Zusatz 10. In Zus. 7. und Zus. 8. liegt auch der kleinern Kathete ein kleinerer Winkel gegenüber, d. h. Winkel B'C'A ist kleiner als BCA; weil BC'A''<BCA'' und BCA''<BCA ist. Hier sind zwar beide Katheten $<\frac{\pi}{2}$; indeß die Vergleichung der Nebendreiecke $\overline{\alpha\beta\gamma}$ und $\alpha\overline{\beta\gamma}$ nach dem vorher gezeigten Verfahren ergiebt die Allgemeingültigkeit des Satzes: Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken von gleichen Hypotenusen eine Kathete des einen Dreieckes kleiner als eine Kathete des andern ist, so liegt er kleinern Kathete ein kleinerer Winkel gegenüber.

Zusatz 11. Die Umkehrung: Wenn in zwei rechtwinklichen Dreiecken von gleichen Hypotenusen ein schiefer Winkel des einen Dreiecks kleiner als ein schiefer Winkel des andern Dreiecks ist, so liegt dem kleinern Winkel eine kleinere Kathete gegenüber — ist aus dem Vorhergehenden klar.

Anmerk. Die Zusätze 3 bis 6. des §. 28. ließen sich auch hier leicht ableiten.

§. 39.

Lehrsatz. Wenn aus einer Spitze eines sphärischen Dreieckes ein Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite gefällt wird, so liegt dies innerhalb des Dreieckes, wenn die andern beiden Winkel desselben gleich-

artig sind; außerhalb aber, wenn jene Winkel ungleichartig sind.

Beweis. Sind in dem Dreiecke ABC (Figur 28.) die Winkel B und C gleichartig, und das Perpendikel von A auf BC fiele außerhalb des Dreieckes, wie AD; so würden in den rechtwinklichen Dreiecken ADC, ADB die Winkel ACD, ABD mit der Kathete AD gleichartig, also die Winkel ABD, ACB ungleichartig seyn, gegen die Voraussetzung; also muß das Perpendikel innerhalb des Dreieckes liegen.

Sind aber die Winkel B, C ungleichartig und das Perpendikel läge im Dreiecke, etwa wie AE; so müßten die ungleichartigen Winkel B, C der gemeinschaftlichen Kathete AE gleichartig seyn, was sich widerspricht. Folglich muß das Perpendikel außerhalb liegen.

Zusatz 1. Das Perpendikel im Dreiecke ist kleiner oder größer als ein Quadrant, je nachdem die Winkel an der Grundseite spitze oder stumpfe sind. Das Perpendikel außerhalb des Dreieckes ist mit dem Winkel an der Grundlinie gleichartig, dem es gegenübersteht.

Zusatz 2. Das Perpendikel steht dem dem Rechten näheren Winkel an der Grundseite, so wie der von dem Quadranten entferntern Seite (§. 27. Zus. 1.) des Dreieckes näher, als dem andern Winkel an der Grundseite und der an demselben liegenden Seite. (§. 38. Zus. 1. 2.) Daher ist von den Abschnitten, welche durch das Perpendikel auf der Grundseite gebildet werden, der an dem oben bezeichneten Winkel liegende immer kleiner als im Quadranten. Und hieraus folgt, daß von den beiden Theilen des Winkels an der Spitze, welche durch das Perpendikel gebildet werden, derjenige, welcher dem kleinern Abschnitte gegenübersteht, immer ein spitzer seyn muß.

Zusatz 3. Ist einer von den Winkeln B, C an der Grundseite unbekannt, so läßt sich die Lage des Perpendikels aus der ihm gegenüberliegenden Seite, aus dem andern Winkel an der Grundseite und der dritten Seite bestimmen.

Es sey nämlich der Winkel C unbekannt, aber die Seiten AB, AC, und der Winkel B bekannt; so liegt das Perpendikel innerhalb des Dreieckes, wenn AB dem Quadranten nicht näher als AC und mit dem Winkel B gleichartig ist; außerhalb des Dreieckes liegt das Perpendikel, wenn unter denselben Umständen AB und B ungleichartig sind. Denn ist AB entfernter vom Quadranten, oder eben so nahe, als AC und zugleich AB gleichartig mit B, so ist AB mit C, also auch B mit C gleichartig und das Perpendikel liegt im Dreiecke. Ist aber unter derselben Voraussetzung AB und B ungleichartig, so sind es auch B und C; daher liegt das Perpendikel außerhalb. — Findet indeß jene Voraussetzung nicht statt, ist also AB dem Quadranten näher als AC, und sind weiter keine Stücke des Dreieckes bekannt, so läßt sich die Lage des Perpendikels nicht bestimmen, weil durch die genannten drei Stücke das Dreieck selbst nicht bestimmt ist, sondern zwei verschiedene Dreiecke denselben entsprechen, wo das Perpendikel einmal in, das andere Mal außer dem Dreiecke liegt. (cf. §. 41. II.)

§. 40.

Lehrsatz. Das Perpendikel aus der Spitze eines gleichschenklichen sphärischen Dreieckes auf die Grundseite halbirt den Winkel an der Spitze, wie die Grundseite.

Beweis. In dem sphärischen Dreiecke ABC (Figur 29. a.) sey AB=AC; so ist auch B=C und das Perpendikel von A auf BC liegt innerhalb des Dreieckes. Es sey AD. Da in den rechtwinklichen Dreiecken ADB, ADC die Hypotenuse (AB, AC) und eine Kathete (AD=AD) gleich ist, so sind die Dreiecke gleich (§. 29. Zus. 2.) und es ist BD=DC; BAD=CAD.

Anmerk. Indirekt folgt der Satz aus §. 39. Zus. 2.

Zusatz 1. Umgekehrt: Der aus der Spitze auf die

Mitte der Grundseite des gleichschenklichen Dreieckes gehende Bogen steht auf ihr senkrecht und halbirt den Winkel an der Spitze. Und: Der den Winkel an der Spitze halbirende Bogen steht auf der Mitte der Grundseite senkrecht.

Zusatz 2. Auch, wenn die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes $=\pi$ ist, trifft der den Winkel jener Spitze halbirende Bogen die Mitte der dritten Seite. Denn es sey in dem Dreiecke ABC (Figur 29. b.) $AB+AC=\pi$; dann ist auch $ABC+ACB=\pi$. Verlängert man AB, AC bis zum zweiten Durchschnitt in A', so ist $A'C+AC=AB+AC$; daher $A'C=AB$. Eben so ist Winkel $A'CD+BCA=ABD+BCA$; daher $A'CD=ABD$. Nimmt man hiezu noch $BDA=CDA'$; so ist die Gleichheit der Dreiecke BDA und CDA' evident; daher $BD=DC$. — Die Umkehrung bedarf keiner Auseinandersetzung.

Daher läßt sich der allgemeinere Satz aufstellen:

Sind zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes dem Quadranten gleich nahe, so wird die dritte Seite mit dem ihr gegenüberliegenden Winkel durch einen und denselben Bogen halbirt.

§. 41.

Aufgabe. Ein sphärisches Dreieck aus drei Stücken desselben zu konstruiren.

Auflösung. Die möglichen Ternen, welche aus den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes gebildet werden können, sind: 1) Drei Seiten, 2) zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, 3) eine Seite mit den anliegenden Winkeln, 4) drei Winkel, 5) zwei Seiten mit dem einen von diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel, 6) zwei Winkel mit einer Seite, die einem jener Winkel gegenübersteht.

Die Fälle 1), 2), 3) werden aufgelöst, wie bei ebnen Dreiecken; daher wir sogleich zu den folgenden übergehen.

I. Die drei Winkel des zu konstruirenden Dreieckes seyen A, B, C.

Man nehme (Figur 30.) drei auf einander senkrechte Hauptkreise PQP'Q', QRQ', PRP' und konstruire eine Spindel PMNP', deren Winkel = A, so daß sie durch PRP halbirt wird. Um die Gegenpunkte Q, Q' beschreibe man mit dem sphärischen Radius $=\frac{1}{2}$A Kreise, welche QRQ' in q, q' schneiden; um q mit dem Radius = B und um q' mit dem Radius = C beschreibe man Kreise, welche den Durchschnitt p geben. Um p als Pol beschreibe man einen Hauptkreis, der in G, F, die Spindel PMNP' schneide; so ist PGF das verlangte Dreieck.

Beweis. Der Gegenpunkt von p sey p', so ist qq'p' das Polardreieck von GPF. Denn q ist der Pol von PFP', weil $Qq=\frac{1}{2}A=RN$, daher $qN=QR=\frac{1}{2}\pi$ und auf PNP' senkrecht ist. Auf ähnliche Weise folgt, daß q' der Pol von PMP' ist; p' aber ist als Gegenpunkt von p der Pol von GF. Daher ist Winkel PGF = Supplement von q'p' und da auch $pq'=(\pi-p'q')$ ist; so ist $PGF=pq'=C$. Eben so ist $PFG=(\pi-qp')=pq=B$; der Winkel GPF ist der Konstruktion wegen = A; folglich hat das Dreieck FGP die gegebenen Winkel.

Eine andere vielleicht einfachere Auflösung ist folgende:

Man konstruire ein Dreieck aus den Seiten $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ und beschreibe um die Winkelspitzen desselben als Pole drei Hauptkreise; so bilden diese das verlangte Dreieck.

Beweis ergiebt sich aus §. 15. und §. 16.

II. Um aus zwei Seiten a, b und einem der nicht eingeschlossenen Winkel B, das Dreieck zu konstruiren, nehme man (Figur 31.) AD = a; lege an D einen Bogen DE, der mit AD den gegebenen Winkel B bildet; beschreibe um A mit dem Radius = b einen

Mitte der Grundseite des gleichschenklichen Dreieckes gehende Bogen steht auf ihr senkrecht und halbirt den Winkel an der Spitze. Und: Der den Winkel an der Spitze halbirende Bogen steht auf der Mitte der Grundseite senkrecht.

Zusatz 2. Auch, wenn die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes $=\pi$ ist, trifft der den Winkel jener Spitze halbirende Bogen die Mitte der dritten Seite. Denn es sey in dem Dreiecke ABC (Figur 29. b.) $AB+AC=\pi$; dann ist auch $ABC+ACB=\pi$. Verlängert man AB, AC bis zum zweiten Durchschnitt in A', so ist $A'C+AC=AB+AC$; daher $A'C=AB$. Eben so ist Winkel $A'CD+BCA=ABD+BCA$; daher $A'CD=ABD$. Nimmt man hiezu noch $BDA=CDA'$; so ist die Gleichheit der Dreiecke BDA und CDA' evident; daher $BD=DC$. — Die Umkehrung bedarf keiner Auseinandersetzung.

Daher läßt sich der allgemeinere Satz aufstellen:

Sind zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes dem Quadranten gleich nahe, so wird die dritte Seite mit dem ihr gegenüberliegenden Winkel durch einen und denselben Bogen halbirt.

§. 41.

Aufgabe. Ein sphärisches Dreieck aus drei Stücken desselben zu konstruiren.

Auflösung. Die möglichen Ternen, welche aus den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes gebildet werden können, sind: 1) Drei Seiten, 2) zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, 3) eine Seite mit den anliegenden Winkeln, 4) drei Winkel, 5) zwei Seiten mit dem einen von diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel, 6) zwei Winkel mit einer Seite, die einem jener Winkel gegenübersteht.

Die Fälle 1), 2), 3) werden aufgelöst, wie bei ebnen Dreiecken; daher wir sogleich zu den folgenden übergehen.

I. Die drei Winkel des zu konstruirenden Dreieckes seyen A, B, C.

Man nehme (Figur 30.) drei auf einander senkrechte Hauptkreise PQP'Q', QRQ', PRP' und konstruire eine Spindel PMNP', deren Winkel $=A$, so daß sie durch PRP halbirt wird. Um die Gegenpunkte Q, Q' beschreibe man mit dem sphärischen Radius $=\frac{1}{2}A$ Kreise, welche QRQ' in q, q' schneiden; um q mit dem Radius $=B$ und um q' mit dem Radius $=C$ beschreibe man Kreise, welche den Durchschnitt p geben. Um p als Pol beschreibe man einen Hauptkreis, der in G, F, die Spindel PMNP' schneide; so ist PGF das verlangte Dreieck.

Beweis. Der Gegenpunkt von p sey p', so ist qq'p' das Polardreieck von GPF. Denn q ist der Pol von PFP', weil $Qq=\frac{1}{2}A=RN$, daher $qN=QR=\frac{1}{2}\pi$ und auf PNP' senkrecht ist. Auf ähnliche Weise folgt, daß q' der Pol von PMP' ist; p' aber ist als Gegenpunkt von p der Pol von GF. Daher ist Winkel PGF = Supplement von q'p' und da auch $pq'=(\pi-p'q')$ ist; so ist $PGF=pq'=C$. Eben so ist $PFG=(\pi-qp')=pq=B$; der Winkel GPF ist der Konstruktion wegen $=A$; folglich hat das Dreieck FGP die gegebenen Winkel.

Eine andere vielleicht einfachere Auflösung ist folgende:

Man konstruire ein Dreieck aus den Seiten $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ und beschreibe um die Winkelspitzen desselben als Pole drei Hauptkreise; so bilden diese das verlangte Dreieck.

Beweis ergiebt sich aus §. 15. und §. 16.

II. Um aus zwei Seiten a, b und einem der nicht eingeschlossenen Winkel B, das Dreieck zu konstruiren, nehme man (Figur 31.) $AD=a$; lege an D einen Bogen DE, der mit AD den gegebenen Winkel B bildet; beschreibe um A mit dem Radius $=b$ einen

Kreis, der in C den Bogen ED ſchneide, ſo iſt CAD das geforderte Dreieck.

III. Endlich aus zwei Winkeln A, B und einer gegenüberſtehenden Seite konſtruirt man ein ſphäriſches Dreieck, wenn man aus den Seiten $\overline{A}$, $\overline{B}$ und dem Winkel $\overline{b}$ ein Dreieck (nach II.) verzeichnet und deſſen Polardreieck nimmt.

Zuſatz 1. Bei der in II. angegebenen Konſtruktion fällt in die Augen, daß außer C noch ein zweiter Durchſchnitt C′ des Bogens DE mit dem Nebenkreiſe um A da ſeyn muß, weil ein Kreis immer zwei Durchſchnittspunkte hat (§. 4.); daß alſo zwei Dreiecke CAD, C′AD möglich ſeyn können, welche der Aufgabe genügen. Nach §. 29. iſt aber ein ſphäriſches Dreieck durch die Seiten a, b und den Winkel B völlig beſtimmt, wenn b dem Quadranten näher iſt, als a, oder eben ſo nahe.

Daraus ergiebt ſich, daß obige Zweideutigkeit nur dann ſtatt finden könne, wenn b entfernter vom Quadranten iſt, als a.

Wir wollen noch nachweiſen, daß in dieſem Falle immer zwei und nur zwei verſchiedene Dreiecke der Aufgabe genügen. Es ſey nämlich (Figur 27.) AD=a gemacht und DE′ ſo an AD gelegt, daß Winkel ADE′=B. Die zweite gegebene Seite b muß nun in jedem Falle ſo liegen, daß der eine Endpunkt in A, der andre in den Halbkreis DE′D′ fällt; denn fiele er in DED′, ſo würde entweder $b > \pi$, oder der Winkel ADE′ nicht im Dreiecke ſeyn. Iſt alſo AB ſenkrecht auf E′D gezogen, ſo muß b entweder zwiſchen AD und AB, oder zwiſchen AD′ und AB fallen. Von den Bogen BD und BD′ ſey BD der kleinere und BD″=BD genommen; ſo liegen zwiſchen AB und AD dieſelben Bogen, wie zwiſchen AB und AD″ (§. 38. Zuſ. 3.); die Bogen aber zwiſchen AD″ und AD′ finden ſich nicht zwiſchen AB und AD. Zugleich ſind die zwiſchen AD″ und AD liegen-

den Bogen entfernter vom Quadranten, als die zwischen AD″ und AD′. Ist also b entfernter vom Quadranten, als a (AD), so liegt es zwischen AD″ und AD und hat zweierlei Lagen, zu beiden Seiten des Perpendikels, etwa wie AC und AC′, wodurch die beiden der Aufgabe entsprechenden Dreiecke ADC, ADC′ entstehen. Daß b nur zwei Lagen haben, also nur zwei verschiedene Dreiecke den gegebenen Stücken genügen können, folgt aus §. 38. —

Wäre b dem Perpendikel AB selbst gleich, also das Maximum oder Minimum der Bogen, welche von A nach DE′ gehen können (§. 38.); so könnte es nur eine Lage haben, und es würde nur ein Dreieck möglich seyn.

Dieser Fall also, der äußerste unter allen möglichen, macht eine Ausnahme.

Es würde in diesem Falle der (nach II.) um A beschriebene Kreis den Bogen DE nur berühren.

Zusatz 2. Da die Auflösung in III. von der in II. abhängt, so findet dort dieselbe Zweideutigkeit und Entscheidung derselben statt, wie sich mit Hülfe des Polardreieckes leicht darthun läßt. Die Entscheidung ist: Aus zwei Winkeln A, B, und einer nicht eingeschlossenen Seite b lassen nur dann zwei verschiedene Dreiecke sich bilden, wenn B vom Rechten entfernter ist als A.

Zusatz 3. Ganz allgemein für II. und III. läßt sich das Gesetz der Zweideutigkeit so aussprechen:

Ist unter den gegebenen Stücken dasjenige, welches einem Gegebenen gegenübersteht, vom Quadranten oder Rechten entfernter, als das dritte Gegebene, so findet Zweideutigkeit statt; sonst nicht.

§. 42.

Aufgabe. Den Punkt der Kugelfläche zu finden, der von allen Seiten eines sphärischen Dreieckes gleichen Abstand hat.

Auflösung. Man halbire zwei Winkel des Dreieckes durch Bogen; so ist der Durchschnitt derselben der geforderte Punkt.

Beweis. In dem Dreiecke ABC (Figur 32.) seyen die Winkel A und C halbirt und D der Durchschnitt der Halbirungsbogen. Von D fälle man auf die Seiten des Dreieckes die Perpendikel DE, DF, DG und ziehe DB.

Die rechtwinklichen Dreiecke ADE, ADF sind gleich, weil AD=AD; EAD=FAD (§. 30. Zus. 2.); daher ist DE=DF. Aus demselben Grunde sind die Dreiecke DFC, DGC einander gleich; daher DF=DG. Mithin ist DF=DG=DE; also D von allen Seiten gleich entfernt.

Zusatz 1. Da in den rechtwinklichen Dreiecken DEB, DGB die Hypotenuse und eine Kathete gleich ist (DB=DB; DG=DE); so sind auch diese Dreiecke gleich und Winkel EBD=GBD; also auch der dritte Winkel halbirt.

Zusatz 2. Ein Kreis um D als Mittelpunkt mit dem Radius =DE beschrieben, geht durch die Punkte E, F, G und liegt innerhalb des Dreieckes, weil alle übrigen Punkte der drei Seiten einen größern Abstand von D haben, als der Radius ist. (§. 38.) Der Kreis berührt also nur die Seiten.

§. 43.

Aufgabe. Den Punkt der Kugelfläche zu finden, welcher von allen Spitzen eines sphärischen Dreieckes gleichen Abstand hat.

Auflösung. Durch die Mittelpunkte zweier Seiten des Dreieckes lege man Perpendikel auf dieselben; der Durchschnitt derselben ist von allen Ecken des Dreieckes gleich entfernt.

Beweis. Es seyen (Figur 33.) D und E die Mittelpunkte der Seiten AB und AC, F der Durchschnitt der auf jene Seiten senkrechten Bogen DF, EF. Die zu erweisende Gleichheit der Bogen FA, FB, FC ergiebt sich so:

Die an D rechtwinklichen Dreiecke ADF, BDF sind gleich, weil AD=DB und FD=FD; daher ist AF=BF. Die an E rechtwinklichen Dreiecke AEF, CEF sind wegen AE=EC und EF=EF einander gleich; daher AF=CF. Mithin sind die drei Bogen AF, BF, CF unter sich gleich.

Zusatz 1. Da das Dreieck BFC gleichschenklich ist, wird auch die dritte Seite BC durch das von F gefällte Perpendikel FG halbirt.

Zusatz 2. Da FA, FB größer als alle Bogen sind, welche von F auf die Seite AB zwischen A und B fallen (§. 38. Zus. 1.) und dasselbe von den andern Seiten AC, BC gilt; so muß der Nebenkreis, welcher um F als Mittelpunkt mit dem Radius AF beschrieben wird und also durch die Spitzen A, B, C geht, ganz außerhalb des Dreieckes liegen. Der Kreis ist also ein umgeschriebener, wie der im vorigen Paragraphen ein eingeschriebener.

Zusatz 3. Der Durchschnitt F der Perpendikel DF, EF kann auch außerhalb des Dreieckes liegen; denn in einem Nebenkreise sind Dreiecke möglich, in denen der Mittelpunkt des Kreises nicht ist.

Anmerk. Der Kürze wegen mag der Radius des um ein Dreieck beschriebenen Kreises der Umschreibungsradius und eben so Einschreibungsradius der Radius des in ein Dreieck beschriebenen Kreises heißen.

§. 44.

Lehrsatz. Der Umschreibungsradius eines sphärischen Dreieckes ist das Komplement des Einschreibungsradius des Polardreieckes und umgekehrt.

Beweis. Es sey (Figur 34. a.) ABC ein sphärisches

Dreieck und A′, B′, C′ bezüglich die Pole von BC, AC, AB, also A′B′C′ das Polardreieck. In dem Dreiecke ABC sey G der Mittelpunkt des um ABC beschriebenen Kreises, also die Radien GA, GB, GC einander gleich. Verlängert man diese bis sie die Seiten des Polardreieckes bezüglich in D, E, F treffen, so sind AD, BE, CF Quadranten, weil A, B, C die Pole der Seiten B′C′, A′C′, A′B′ sind; daher auch GD=GE=GF. Nach §. 11. Zus. 5. stehen diese senkrecht auf den betreffenden Seiten des Polardreieckes, daher ist (wegen §. 42. Zus. 2.) G zugleich der Mittelpunkt des in das Polardreieck beschriebenen Kreises und dessen Radius =GD. Da nun GD das Komplement von GA ist, so ist der Lehrsatz evident, dessen Umkehrung daraus hervorgeht, daß auch ABC das Polardreieck von A′B′C′ ist.

Zusatz. Die Kreise, von denen der eine um ein sphärisches Dreieck, der andere in das Polardreieck beschrieben ist, haben einerlei Mittelpunkt, sind also Parallelkreise.

§. 45.

Aufgabe. Die Winkel zu bestimmen, unter welchen die Ebne des Sehnendreieckes (d. i. des durch die Sehnen der Seiten eines sphärischen Dreieckes gebildeten ebnen Dreieckes) sich gegen die Ebnen der Seiten des sphärischen Dreieckes neigt.

Auflösung und Beweis. Die Ebne des Sehnendreieckes ist die Ebne des durch die Spitzen des sphärischen Dreieckes gelegten, oder um dasselbe beschriebenen, Kreises. Die Aufgabe kommt also darauf zurück, die Winkel des umgeschriebenen Kreises mit den Hauptkreisen, deren Bogen das sphärische Dreieck bilden, zu bestimmen. Der Winkel zweier Kreise ist nun das Supplement ihrer Polabstände. Man konstruire also in dem Dreiecke ABC (Figur 34. b.) den

Mittelpunkt G des umgeschriebenen Kreises, indem man durch die Mitte zweier Seiten AC, BC, die Perpendikel GD, GE legt. Der Gegenpunkt von G sey G'; der Pol von AB sey γ; so ist $\gamma G'$ die Entfernung der hiehergehörigen (positiven) Pole. Ihr Supplement ist γG, welches verlängert die Seite AB senkrecht in F trifft (§. 11. Zus. 5.), und welches das Komplement von GF, dem vom Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises auf AB fallenden Perpendikel, ist.

Man lege also durch die Mittelpunkte der Seiten des sphärischen Dreieckes Perpendikel, welche sich in Einem Punkte schneiden; so sind diese die Komplemente der Winkel, unter welchen sich das Sehnendreieck gegen die betreffenden Seiten des sphärischen Dreieckes neigt.

Zusatz 1. Sind zwei Seiten des Dreieckes, etwa AC, BC, gleich; so sind es auch die Perpendikel GD, GE derselben; also das Sehnendreieck unter gleichen Winkeln gegen die gleichen Seiten geneigt.

Zusatz 2. Bei gleichseitigen Dreiecken sind alle drei Neigungswinkel des Sehnendreieckes gleich.

§. 46.

Aufgabe. Den Winkel zu bestimmen, unter welchem die Ebnen der Sehnendreiecke zweier Polardreiecke sich gegen einander neigen.

Aufgabe. In einem der beiden Dreiecke ABC (Figur 35.) lege man durch die Mittelpunkte D, E zweier Seiten AC, BC senkrechte Bogen, deren Durchschnitt G sey; dann halbire man zwei Winkel A, C des Dreieckes durch Bogen, deren Durchschnitt in H sey; so ist der Bogen GH

dem Supplemente des gesuchten Neigungswinkels gleich, dessen Nebenwinkel also = GH.

Beweis. Die Ebnen der Sehnendreiecke zweier Polardreiecke sind die Ebnen der um beide beschriebenen Kreise. Da nach §. 44. Zus. der um ein Polardreieck beschriebene Kreis parallel ist dem in des andern beschriebenen Kreise; so ist der gesuchte Neigungswinkel gleich dem Winkel der in und um das Dreieck ABC beschriebenen Kreise, deren Mittelpunkte G und H sind. (§. 42. Zus. 2. und §. 43. Zus. 2.) Sind nun G′ und H′ die Gegenpunkte von G und H; so sind G′, H′ die auf den dem Mittelpunkt der Kugel zugekehrten Seiten der Kreisebnen liegenden (positiven) Pole, also ihr Abstand G′H′, welcher = GH, das Supplement des gesuchten Winkels (§. 12.), der also = GH′ ist.

Zusatz. Die um und in ein sphärisches Dreieck beschriebenen Kreise neigen sich gegen einander unter denselben Winkeln, wie die um und in das Polardreieck beschriebenen Kreise.

Von dem Flächenraume sphärischer Dreiecke und Polygone.

§. 47.

Lehrsatz. Zwei sphärische Spindeln haben gleichen Flächenraum, wenn ihre Winkel gleich sind.

Beweis. Die Winkel APB, DPC (Figur 36.) der Spindeln PABP′ und PDCP′ seyen einander gleich. Man lege PCP′ auf PAP′, so fällt PDP′ auf PBP; die Spindeln decken sich, haben also gleiche Flächenräume.

§. 48.

Lehrsatz. Sind zwei sphärische Dreiecke ihren

Winkeln und Seiten nach gleich, so haben sie gleichen Flächenraum.

Beweis. In den Dreiecken ABC, A′B′C′ (Figur 37.) sey AB=A′B′; AC=A′C′ u. s. w. und D, D′ seyen die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kreise; also die Perpendikel DE, DF, DG so wie D′E′, D′F′, D′G′ unter sich gleich, und die Winkel A, A′, B, B′ durch AD, A′D′, BD, B′D′ halbirt. Die Dreiecke DAB, D′A′B′ sind einander gleich, weil AB=A′B′; Winkel $DAB=\frac{1}{2}CAB=\frac{1}{2}C'A'B'=D'AB'$; und ebenso DBA=D′B′A′ ist; daraus folgt AD =A′D′. Die an G, G′ rechtwinklichen Dreiecke AGD, A′G′D′ sind gleich, weil AD=A′D′ und Winkel DAG= D′A′G′ (§. 30. Zus. 2.); daraus folgt DG=D′G′ und AG=A′G′. Es sind also die Einschreibungsradien beider Dreiecke gleich; und wie AG=A′G′ bewiesen wurde, so läßt sich die Gleichheit aller übrigen gleichbezeichneten Theile auf den Seiten beider Dreiecke darthun. Ueberdies ist nach §. 42. AG=AF; A′G′=A′F′; folglich auch A′F′=AG; A′G′=AF. Man muß daher die Vierecke AFDG, A′F′D′G′ so auf einander legen, daß sie sich decken; nämlich AF mit A′G′, AG mit A′F′ u. s. w. Daher haben diese Vierecke gleichen Flächenraum. Eben so ergiebt sich die Deckung der Vierecke FDEC mit F′D′E′C′ und GDEB mit G′D′E′B′. Da diese drei Vierecke bezüglich gleiche Flächenräume haben, so sind auch ihre Summen, die Flächenräume der Dreiecke, einander gleich.

Zusatz. Gegendreiecke haben also auch gleiche Flächenräume; desgleichen Gegenpolygone, weil sie sich durch Diagonalen in lauter Gegendreiecke zerlegen lassen.

§. 49.

Lehrsatz. Der Flächenraum der sphärischen Spindel verhält sich zu der Kugelfläche,

wie der Winkel der Spindel zu vier Rechten.

Beweis. Der Winkel APB (Figur 36.) der Spindel PABP' sey mit W, die Summe von vier Rechten durch O; der Flächenraum der Spindel mit S, die Kugelfläche mit K bezeichnet. Es sind nun entweder W und O kommensurabel oder inkommensurabel.

1) Sind sie kommensurabel, so sey ein Winkel w das gemeinschaftliche Maaß, dem eine Spindel s entspricht, und es sey $W=nw$; $O=mw$; so ist wegen §. 48. $S=ns$; $K=ms$; also $\frac{W}{O}=\frac{n}{m}$; und $\frac{S}{K}=\frac{n}{m}$; daher $\frac{W}{O}=\frac{S}{K}$.

2) Sind W und O inkommensurabel und es wäre nicht $\frac{W}{O}=\frac{S}{K}$; so sey $\frac{W+v}{O}=\frac{S}{K}$, wo v irgend einen Winkel bedeutet. Jedenfalls läßt sich nun v in zwei Theile v', v'' zerlegen, so daß $(W+v')$ mit O kommensurabel ist, und es gehöre zu dem Winkel v' die Spindel s'. Dann ist nach dem eben bewiesenen $\frac{W+v'}{O}=\frac{S+s'}{K}$; nach der Annahme aber $\frac{W+v}{O}=\frac{S}{K}$. Da nun $S+s'>S$ ist, so müßte auch $W+v'>W+v$; also der Theil v' größer als das Ganze v seyn; was ungereimt ist.

Eben so zeigt man, daß auch nicht $\frac{W-v}{O}=\frac{S}{K}$ seyn kann. Also muß in jedem Falle $\frac{W}{O}=\frac{S}{K}$ seyn.

Zusatz 1. Nimmt man als Winkeleinheit denjenigen Winkel u, der als Centriwinkel durch den dem Radius gleichen Bogen gemessen wird; so ist bekanntlich $O=2\pi u$ und es sey $W=wu$, wo w eine Zahl bedeutet.

Nimmt man ferner das Quadrat des Kugelradius R zur Einheit des Flächenraumes, so ist $K=4\pi R^2$, und es sey $S=sR^2$, wo auch s eine Zahl ist.

Nach dem Lehrsatze ist also $\frac{wu}{2\pi u}=\frac{sR^2}{4\pi R^2}$ oder $w=\frac{s}{2}$; woraus $s=2w$ folgt; das heißt: die Verhältnißzahl des Flächenraumes der Spindel ist das Doppelte der Verhältnißzahl des Winkels, wenn Spindel und Winkel auf die oben genannten Einheiten bezogen werden. Der Kürze wegen drückt man dies so aus: der Flächenraum der Spindel ist doppelt so groß, als ihr Winkel; wobei man indeß immer nur die Zahlen, durch welche jene Größen den angenommenen Einheiten nach gemessen werden, meint.

Zusatz 2. Nimmt man (Figur 36.) die Bogen PA, PB, jeden gleich einem Quadranten, so ist der Bogen AB das Maaß des Winkels P, d. h. wenn als Längeneinheit der Radius (der Kugel), und als Winkeleinheit der oben bezeichnete Winkel genommen werden, so hat AB dieselbe Verhältnißzahl w, wie P; es ist $AB=wR$. Da die Spindel $S=2wR^2$ ist, so ist auch $S=2AB.\ R$, oder $=2\Lambda B$, wenn man die Einheit R unterdrückt. Es ist also der Flächenraum der Spindel gleich dem doppelten Rechtecke, dessen eine Seite der Radius der Kugel, dessen andere Seite dem Bogen gleich ist, der den Winkel der Spindel mißt.

In dem oben bezeichneten Sinne kann man auch hier sagen: der Flächenraum der Spindel ist gleich dem doppelten Bogen ihres Winkels. —

Die Kugelfläche ist sonach $=4\pi=$ einer Spindel deren Winkel $=4$ Rechten.

Anmerk. Der uneigentliche Ausdruck: der Flächenraum der Spindel ist ihrem doppelten Winkel gleich, — kann recht wohl geduldet werden, wenn man ihn nur richtig versteht. Denn der sonst auch übliche Ausdruck: der Flächenraum der Spindel hat zum Maaße den doppelten Winkel, oder wird durch den doppelten Winkel gemessen — ist nicht weniger uneigentlich, da

das Maaß mit dem zu Messenden gleichartig seyn muß; Flächenraum und Winkel (oder Bogen) aber heterogene Dinge sind.

Der Kürze wegen werden wir uns also in der Folge des Ausdruckes bedienen: „der Flächenraum F ist dem Winkel W oder Bogen B gleich" — und verstehen darunter eigentlich: „die Verhältnißzahl f ist der Verhältnißzahl w oder b gleich" — wo $f = \frac{F}{R^2}$; $w = \frac{W}{u}$ (Zus. 1.); $b = \frac{B}{R}$ ist.

§. 50.

Lehrsatz. Der Flächenraum des sphärischen Dreieckes ist dem Ueberschusse der Summe seiner Winkel über zwei Rechte gleich.

Beweis. Es sey (Figur 38.) ABC ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten, zu Hauptkreisen vollendet, sich zum zweiten Male in den Gegenpunkten A', B', C' schneiden und so acht Dreiecke bilden, welche die ganze Kugelfläche einnehmen, und von denen je zwei Gegendreiecke sind, also gleichen Flächenraum haben. Bezeichnet man das Dreieck ABC mit T; dessen Nebendreiecke A'BC, AB'C, ABC' bezüglich durch T', T'', T'''; die Gegendreiecke dieser viere durch t, t', t'', t'''; so ist $T+T'+T''+T'''+t+t'+t''+t'''=4\pi$ (§. 49. Zus. 2.); und da $T=t$; $T'=t'$ u. s. w., so ist $2(T+T'+T''+T''')=4\pi$; also $T+T'+T''+T'''=2\pi$. Verbindet man T mit jedem seiner Nebendreiecke, so erhält man drei Spindeln mit den Winkeln des Dreieckes. Es ist dann $T+T'=2A$; $T+T''=2B$; $T+T'''=2C$; addirt man diese Gleichungen, so erhält man $3T+T'+T''+T'''=2(A+B+C)$; hievon die Gleichung $T+T'+T''+T'''=2\pi$ abgezogen, giebt $2T=2(A+B+C)-2\pi$, woraus $T=A+B+C-\pi$ folgt.

Anmerk. Auch hieraus ergiebt sich, daß die Summe der Winkel eines sphärischen Dreieckes größer als zwei Rechte ist, und zwar um den Flächenraum des Dreiecks.

Zusatz. Da die Winkelsumme stets $<3\pi$ ist, so muß

$T < 2\pi$ d. h. der Flächenraum des Dreieckes kleiner als die halbe Kugelfläche seyn.

§. 51.

Lehrsatz. Der Flächenraum eines sphärischen Polygones ist gleich der Summe aller Winkel desselben, weniger so oftmal zwei Rechte, als das Polygon Seiten weniger zwei hat.

Beweis. Es sey (Figur 39.) ABCD.... ein sphärisches Polygon von n Seiten. Zieht man von einem innerhalb des Polygones beliebig gewählten Punkte P Bogen nach den Ecken desselben, so zerfällt das Polygon in n Dreiecke. Es ist nun $PAB = \alpha' + \beta' + \varphi' - \pi$;

$PBC = \alpha'' + \beta'' + \varphi'' - \pi$ u. s. w.

Mithin die Summe aller Dreiecke

$$PAB + PBC + \ldots\ldots = \alpha' + \beta' + \alpha'' + \beta'' + \ldots\ldots + \varphi' + \varphi'' + \ldots\ldots - n\pi;$$

es ist nun $\alpha' + \beta' + \alpha'' + \beta'' + \ldots\ldots = A + B + C + \ldots\ldots$; und $\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \ldots\ldots = 2\pi$; daher die Summe aller Dreiecke, oder der Flächenraum des Polygones

$$= (A + B + C + \ldots\ldots) + 2\pi - n\pi;$$
$$= (A + B + C + \ldots\ldots) - (n - 2)\pi.$$

Zusatz 1. Der Satz gilt auch von Polygonen mit einwärts gehenden Winkeln, wenn man nicht diese, sondern die überstumpfen innern Winkel (die Implemente jener) als Winkel des Polygones betrachtet; denn es ist hier dieselbe Zerfällung in n Dreiecke möglich.

Zusatz 2. Nimmt man den Punkt P auf einer Seite des Polygones, so verschwindet ein Dreieck und man erhält nur (n — 1) Dreiecke. Rückt man P in eine Ecke des Polygones, so verschwindet noch eins, also zusammen zwei

Dreiecke, und es ist also $(n-2)$ die Zahl der Dreiecke, welche sich durch Diagonalen von einem Punkte aus bilden lassen. —

Auch wenn P außerhalb des Polygones genommen wird, ergiebt sich der Flächenraum; nur umständlicher.

Zusatz 3. Bezeichnet man den Flächenraum des Polygones mit P, so ist nach dem Lehrsatze

$$P=(A+B+C+\ldots.)-n\pi+2\pi$$
$$=2\pi-(\pi-A)-(\pi-B)-(\pi-C)-\ldots.$$
$$=2\pi-(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots..);$$

also ist der Flächenraum jedes Polygones, welches keine einwärts gehenden Winkel hat, kleiner als die halbe Kugelfläche.

Zusatz 4. Da $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots.)$ den Perimeter des Polarpolygones ausmacht und nach Zus. 3. kleiner, als 2π ist; so folgt, daß der Perimeter jedes sphärischen Polygones kleiner als 2π, d. i. als ein Hauptkreis ist.

§. 52.

Erklärung. Ein sphärisches Dreieck heißt ein schiefes, wenn der von der Spitze auf die Mitte der Grundseite gezogene Bogen mit der Grundseite schiefe Winkel bildet. Je mehr dieser Bogen von dem durch die Mitte der Grundseite senkrecht gehenden Bogen abweicht, desto schiefer ist das Dreieck.

Zusatz 1. Errichtet man auf der Mitte der Grundseite einen senkrechten Bogen, so ist von den andern beiden Seiten des Dreieckes diejenige, welche jener senkrechte Bogen nicht trifft, die kleinere.

Denn ist im Dreieck ABC (Figur 40.) DE dieser senkrechte Bogen, der in F die Seite AC trifft, so ist $CB<FB+FC$; aber $FB=FC$ (§. 38. Zus. 3.), daher $CB<AF+FC$, d. i. $CB<CA$.

Zusatz 2. Umgekehrt: Die größere Seite wird stets von dem Perpendikel getroffen.

§. 53.

Lehrsatz. Wenn zwei sphärische Dreiecke gleiche Grundseite und gleichen Flächenraum haben, so hat das schiefere einen größern Umfang.

Beweis. Die Dreiecke (Figur 41.) ACB, ADB seyen ihrem Flächenraume nach gleich, ADB sey das schiefere Dreieck und CB, DB die kleineren Seiten. Da $CB < CA$, so ist Winkel $CAB < CBA$; um so mehr $OAB < OBA$; also $OB < OA$. Es sey $OF = OB$, $OG = OD$, so ist Dreieck $OGF = ODB$, wegen Gleichheit zweier Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel. Es kann aber G weder zwischen O und C, noch auf C selbst fallen; denn in beiden Fällen würde $OGF < OCA$ seyn; da doch Dreieck $OCA = ODB$ seyn muß, weil $ACB - AOB = ADB - AOB$ ist.

Schneidet nun GF in E die Seite AC, so ist $AE < AF + FE$; $EC < EG + GC$; daher $AC < AF + FG + GC$. Addirt man zu dieser Ungleichung die Gleichung $CB = CO + OF$, so folgt

$$AC + CB < AF + FG + GO + OF;$$

es ist aber $GO = OD$; daher $AF + OF + GO = AD$; auch ist $FG = DB$; folglich $AC + CB < AD + DB$.

Zusatz. Unter den Dreiecken auf gleicher Grundseite und von gleichem Flächenraume hat das gleichschenkliche den kleinsten Umfang; denn jedes andere steht schiefer, als das gleichschenkliche. (§. 40. Zus. 1.)

§. 54.

Lehrsatz. Unter den sphärischen Dreiecken auf gleicher Grundseite und von gleichem Umfange hat das schiefere den kleinern Flächenraum.

Beweis. In den Dreiecken (Figur 41.) ABC, ABD sey $AC + BC = AD + BD$ und ABD das schiefere Dreieck.

Daſſelbe kann nun nicht =ABC ſeyn, weil nach vorigem Satze ABC einen kleinern Umfang als ABD haben müßte, was gegen die Vorausſetzung iſt. Eben ſo wenig kann ABD>ABC ſeyn; denn wäre dies, ſo läßt ſich AH ſo ziehen, daß ABH=ABC iſt. Dann würde AH+HB>AC+CB ſeyn, und da AH+HB<AD+DB iſt, ſo müßte um ſo mehr AD+BD>AC+BC ſeyn, was mit der Vorausſetzung ſtreitet. Daher iſt ADB<ACB.

Zuſatz. Das gleichſchenkliche Dreieck iſt alſo das größte unter allen, die mit ihm gleiche Grundſeite und gleichen Umfang haben.

§. 55.

Lehrſatz. Unter den ſphäriſchen Polygonen von gleich viel Seiten und gleichem Flächenraume iſt dasjenige, welches den kleinſten Umfang hat, gleichſeitig.

Beweis. Es ſey das ſphäriſche Polygon ABCDE.... dasjenige, welches bei gegebenem Flächenraume den kleinſten Umfang hat. Wäre es nicht gleichſeitig, ſo folgen irgendwo zwei ungleiche Seiten auf einander. Solche ſeyen AB und BC. Denkt man ſich über AC ein Dreieck AKC=ABC und ſo beſchrieben, daß AK=KC; ſo iſt AK+KC<AB+BC (§. 53. Zuſ.) und der Umfang des Polygones AKCDE..., welches =ABCDE... iſt, kleiner als der des letztern, was gegen die Vorausſetzung ſtreitet. Daher können nicht zwei ungleiche Seiten auf einander folgen und das Polygon mit dem kleinſten Umfange muß gleichſeitig ſeyn.

Zuſatz. Unter den Polygonen von gleichviel Seiten und von gleichem Umfange iſt dasjenige, welches den größten Flächenraum hat, ein gleichwinkliches. Denn wenn für den gegebenen Umfang a+b+c+d+....) der Flächenraum ein Maximum iſt, ſo iſt es auch die Winkelſumme

$(A+B+C+D+\ldots)$. Im Polarpolygone ist daher für die gegebene Winkelsumme $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{d}+\ldots)$, mithin für den gegebenen Flächenraum der Umfang $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots)$ ein Minimum; also nach dem Lehrsatze das Polarpolygon ein gleichseitiges. Ist aber $\overline{A}=\overline{B}=\overline{C}$ u. s. w., so ist $A=B=C=\ldots$; also unter den Polygonen von gleichem Umfange das größte ein gleichwinkliches.

§. 56.

Lehrsatz. Unter den Polygonen von gleich viel Seiten und von gleichem Umfange ist das größte ein gleichseitiges.

Beweis. Ist das Polygon ABCDE... (Figur 42.) das größte, welches bei dem gegebenen Umfange und gegebener Seitenzahl möglich ist, und es stießen irgendwo ungleiche Seiten zusammen, etwa AB, BC; so sey über der Grundseite AC ein gleichschenkliches Dreieck AKC beschrieben, so daß $AK+KC=AB+BC$. Dann ist nach §. 54. Zus. das Dreieck $AKC>ABC$, mithin das Polygon AKCDE..., welches gleiche Seitenzahl und gleichen Umfang mit ABCDE.... hat, größer als dieses, gegen die Annahme. Folglich ABCDE.... gleichseitig seyn.

Zusatz 1. Unter den Polygonen von gleich viel Seiten und gleichem Flächenraume ist dasjenige, welches den kleinsten Umfang hat, ein gleichwinkliches.

Denn ist bei gegebenem Flächenraume $(A+B+C+\ldots-(n-2)\pi)$ der Umfang $(a+b+c+\ldots)$ ein Minimum, so ist in dem Polarpolygone bei gegebenem Umfange $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\ldots)$ der Flächenraum $(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\ldots-(n-2)\pi)$ ein Maximum, dasselbe also dem Lehrsatze nach ein gleichseitiges. Aus $\overline{A}=\overline{B}=\overline{C}=\ldots$ folgt dann $A=B=C=\ldots$

Zusatz 2. Aus dem Lehrsatze und §. 55. Zus. folgt: Unter den sphärischen Polygonen von gleich viel Seiten und

von gleichem Umfange ist das größte ein gleichwinkliches und gleichseitiges, also ein regelmäßiges.

Zusatz 3. Aus §. 55. und §. 56. Zus. 1. ergiebt sich: Unter den sphärischen Polygonen von gleich viel Seiten und gleichem Flächenraume ist dasjenige, welches den kleinsten Umfang hat, ein regelmäßiges.

Von dem Nebenkreise.

§. 57.

Erklärung. Die sphärische Sehne ist derjenige innerhalb eines Nebenkreises liegende Bogen eines Hauptkreises, welcher zwei Punkte der Peripherie des Nebenkreises verbindet.

Die Sehne wird zum Durchmesser, wenn sie durch den (sphärischen) Mittelpunkt des Kreises geht.

Zur Sekante wird die Sehne, wenn sie über die Peripherie des Nebenkreises hinaus geht, und die Sekante geht über in eine Tangente, wenn die beiden Durchschnittspunkte derselben in einen zusammenfallen.

Die bei der ebenen Kreisfläche vorkommenden Begriffe des Segmentes oder Kreisabschnittes, des Sektors oder Kreisausschnittes gelten der Analogie gemäß auch bei der sphärischen Kreisfläche; daher diese, so wie andere in der Planimetrie übliche Ausdrücke hier nicht weiter erkläret zu werden brauchen.

§. 58.

Lehrsatz. Die Gegenpunkte derjenigen Punkte, welche auf der Peripherie eines Nebenkreises liegen, bilden wieder einen Nebenkreis, dessen Mittelpunkt der Gegenpunkt des Mittelpunktes, und dessen (sphärischer)

Radius gleich dem Radius des ersten Kreises ist.

Beweis. Es sey (Figur 43.) M der Mittelpunkt des Nebenkreises BAC und A ein beliebiger Punkt in der Peripherie desselben. Der Gegenpunkt von M sey M', der Gegenpunkt von A sey A'; so sind die Gegenbogen AM und A'M' einander gleich.

Denkt man sich nun A auf der Peripherie BAC fortrückend, so rückt auch A' fort, und da in jeder Stellung AM = A'M', so bleibt A' immer in gleicher Entfernung von M'; mithin liegen die Gegenpunkte der Peripherie ABC in einem Nebenkreise, dem die im Lehrsatze ausgesprochenen Merkmale zukommen.

Anmerk. Solche Kreise nennen wir Gegenkreise.

Zusatz 1. Jeder Punkt innerhalb des einen Kreises findet seinen Gegenpunkt innerhalb des Gegenkreises. Denn ist α ein Punkt innerhalb des einen Kreises und M dessen Mittelpunkt, und sind α', M', deren Gegenpunkte, so ist der Bogen Mα kleiner als der Radius, und da M'α' = Mα, auch M'α' kleiner, als der Radius des Gegenkreises; also α' innerhalb des Gegenkreises.

Daher findet jede Figur innerhalb des einen Kreises ihre Gegenfigur innerhalb des Gegenkreises.

Zusatz 2. Gegenkreise sind Parallelkreise, deren Ebnen gleiche Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel haben. Denn da sie gemeinschaftliche Pole, also auch gemeinschaftliche Achse haben, auf welcher die Ebnen beider senkrecht stehen; so sind sie Parallelkreise. Gleichen Abstand von dem Mittelpunkte der Kugel müssen sie aber haben, weil ungleiche Abstände ungleiche Kreise geben würden. (§. 3. Zus. 1.)

Zusatz 3. Legt man durch die Mittelpunkte M, M' der Gegenkreise einen Hauptkreis MAA"M, der in A, A" beide Kreise schneidet, so ist AA" = π — 2MA, und man kann AA' die Entfernung der beiden Kreise von einander nennen.

Je gröſser die Radien MA, M'A', ſind, deſto kleiner in die Entfernung AA''. Gehen die Nebenkreiſe in Hauptkreiſe über, ſo verſchwindet AA'' und beide Gegenkreiſe fallen zuſammen in einen Hauptkreis. Der Hauptkreis iſt alſo ſein eigener Gegenkreis.

Zuſatz 4. Umgekehrt: Haben zwei Nebenkreiſe gleiche Radien und ſind ihre Mittelpunkte Gegenpunkte, ſo ſind ſie Gegenkreiſe. (§. 6. Zuſ. 3.)

§. 59.

Lehrſatz. Wird ein Nebenkreis von einem Hauptkreiſe in zwei Punkten geſchnitten, ſo wird auch deſſen Gegenkreis von demſelben Hauptkreiſe in zwei Punkten, und zwar in den Gegenpunkten der erſtern geſchnitten; wird aber der erſtere Nebenkreis von dem Hauptkreiſe nur in einem Punkte berührt, ſo wird es auch der Gegenkreis, und zwar am Gegenpunkte jenes Berührungspunktes.

Beweis. Wird der erſte Nebenkreis von dem Hauptkreiſe in den Punkten α, β geſchnitten, ſo liegen die Gegenpunkte α', β' derſelben ſowohl in dem Gegenkreiſe, als in dem Hauptkreiſe (§. 4. Zuſ. 2.); mithin ſchneidet der Hauptkreis auch den Gegenkreis in den Punkten α', β', den Gegenpunkten von α, β.

Berührt aber der Hauptkreis den erſten Nebenkreis nur in einem Punkte α, ſo liegt deſſen Gegenpunkt α' ſowohl im Gegenkreiſe, als im Berührungskreiſe. Einen zweiten Punkt kann letzterer mit dem Gegenkreiſe nicht gemein haben, weil er ſonſt nach dem Bewieſenen auch mit dem erſteren Nebenkreiſe zwei Punkte gemein haben müßte.

Folglich berührt er blos den Gegenkreis, und zwar im Gegenpunkte des erſteren Berührungspunktes.

Zusatz 1. Trifft ein Hauptkreis einen Nebenkreis gar nicht, so trifft er auch dessen Gegenkreis nicht.

Zusatz 2. Die Segmente, welche ein Hauptkreis von zwei Gegenkreisen abschneidet, sind Gegensegmente auf gleichen Sehnen.

§. 60.

Lehrsatz. In jedem Nebenkreise stehen gleiche Winkel am Mittelpunkte auf gleichen Sehnen und auf gleichen Bogen, und bilden gleiche Kreisausschnitte.

Beweis. Es sey (Figur 44.) der Winkel AMB = A'MB', wo M der Mittelpunkt des Kreises AB, A'B' ist. Man denke sich den Ausschnitt A'MB' so auf AMB gelegt, daß A'M auf AM fällt, so fällt auch B'M auf BM und B' auf B, wie A' auf A; mithin deckt sich die Sehne A'B' mit AB.

Auch der Nebenbogen A'B' fällt ganz auf den Nebenbogen AB, weil ungleiche Radien da seyn müßten, wenn der eine von dem andern abwiche.

Daher decken auch die Ausschnitte sich.

Zusatz 1. Auf gleichen Sehnen stehen gleiche Winkel am Mittelpunkte; denn die Dreiecke MAB, MA'B' sind allen Seiten nach gleich, wenn A'B' = AB, und also die Winkel AMB, A'MB' einander gleich.

Daher sind durch gleiche Sehnen auch gleiche Bogen, gleiche Ausschnitte — auch gleiche Kreisabschnitte — bedingt.

Zusatz 2. Durch gleiche Bogen AB, A'B' eines Nebenkreises sind gleiche Winkel am Mittelpunkte, gleiche Sehnen u. s. w. bedingt. Denn es läßt sich, wie vorhin, die Deckung der genannten Bogen nachweisen, aus der das Uebrige folgt.

Zusatz 3. Von den beiden Abschnitten, in welche die sphärische Fläche des Nebenkreises durch eine Sehne zerlegt

wird, ist derjenige der größere, in welchem der Mittelpunkt des Kreises liegt; und umgekehrt.

Zusatz 4. Die Gleichheit der zu gleichen Winkeln am Mittelpunkte, oder zu gleichen Sehnen, oder zu gleichen Nebenbogen gehörigen übrigen, vorher genannten, Stücke gilt auch, wenn sie nicht in einem und demselben Kreise, sondern in verschiedenen, jedoch gleichen Kreisen liegen. Denn es läßt sich nicht nur die Deckung solcher Kreise selbst, sondern auch ihrer Bogen, Sehnen, Abschnitte u. s. w. unter der genannten Bedingung nachweisen.

Zusatz 5. Gegensegmente (§. 59. Zus. 2.) haben gleichen Flächenraum.

Hieraus läßt sich die Gleichheit zweier Gegendreiecke ihrem Flächenraume nach ableiten. Denn sie lassen sich in Gegenkreisen konstruiren, — liegen also immer in (so wie auch um) Gegenkreisen, — und ihre Seiten schneiden von den gleichen Gegenkreisen gleiche Segmente ab.

§. 61.

Lehrsatz. Das Perpendikel vom Mittelpunkte des Nebenkreises auf eine Sehne desselben halbirt diese.

Beweis. Steht der Bogen MD (Figur 45.) senkrecht auf der Sehne AB, so sind die rechtwinklichen Dreiecke MDA, MDB gleich, weil MA=MB; MD=MD, (§. 29. Zus.); daher ist AD=DB.

Zusatz 1. Der vom Mittelpunkte des Kreises nach dem Mittelpunkte einer Sehne gehende Bogen steht auf der Sehne senkrecht. Denn dann sind die Dreiecke MDA, MDB wegen Gleichheit dreier Seiten, gleich, und dieser Winkel MDA=MDB.

Zusatz 2. Der durch die Mitte einer Sehne senkrecht gehende Bogen geht durch den Mittelpunkt des Kreises. Denn ginge ein anderer Bogen vom Mittelpunkte des Kreises nach dem Mittelpunkte der Sehne, so würden nach

Zuſ. 1. zwei Perpendikel in demſelben Punkte ſtehen, was nicht möglich iſt. (§. 10. Zuſ.)

Zuſatz 3. Der Mittelpunkt des Kreiſes iſt der Durchſchnitt der in den Mittelpunkten zweier Sehnen ſenkrecht ſtehenden Bogen.

Zuſatz 4. Verlängert man das Perpendikel MD über M hinaus, ſo geht es durch den Pol der Sehne AB (§. 8. Zuſ. 4.); und umgekehrt: wenn durch den Pol einer Sehne und durch den Mittelpunkt des Nebenkreiſes ein Bogen geht, ſo trifft er die Mitte der Sehne; ferner: wenn ein Bogen durch die Mitte der Sehne und durch ihren Pol geht, ſo geht er durch den Mittelpunkt des Nebenkreiſes. Alſo liegen der Mittelpunkt der Sehne, der Mittelpunkt des Nebenkreiſes und der Pol der Sehne immer in einem und demſelben Hauptkreiſe.

Anmerk. Dies folgt auch unmittelbar aus §. 9., wenn man um D als Pol mit dem Radius DA (=DB) einen Kreis beſchreibt.

Zuſatz 5. Die dem Mittelpunkte des Kreiſes nähere Sehne iſt die größere. Denn iſt das auf eine zweite Sehne FG gefällte Perpendikel MH kleiner als MD, ſo iſt in den rechtwinklichen Dreiecken MDA, MHF die Kathete HF größer als AD (§. 38. Zuſ. 7.), alſo, von den Hälften auf die Ganzen geſchloſſen, auch FG>AB. — Der Durchmeſſer iſt alſo größer als jede Sehne.

Zuſatz 6. Umgekehrt: Die größere Sehne iſt die dem Mittelpunkte des Kreiſes nähere. Denn aus FG>AB folgt FH>AD und hieraus wie vorhin HM<MD.

Zuſatz 7. Gleiche Sehnen haben gleiche Entfernung vom Mittelpunkte des Kreiſes; und umgekehrt.

§. 62.

Erklärung. Was unter der ſphäriſchen Sekante zu verſtehen ſey, iſt oben (§. 57.) angedeutet. Hier wollen wir

für das Folgende noch hinzufügen, daß bei mehrern von einem Punkte außerhalb des Nebenkreises ausgehenden Sekanten, wie Figur 46. AC, AD, jede von jenem Punkte bis zu ihrem zweiten Durchschnitte mit dem Kreise genommen wird. Die Stücke derselben bis zum ersten Durchschnitte, wie AC', AD' heißen die äußeren, die andern (Sehnen), wie C'C, D'D, die innern Abschnitte der Sekanten.

Zusatz 1. Zieht man von dem gemeinschaftlichen Ausgangspunkte A der Sekanten durch den Mittelpunkt M des Kreises die Sekante AB, so ist unter den übrigen Sekanten die dem Mittelpunkte des Kreises nähere, zugleich die jener durch den Mittelpunkt gehenden näher liegende, d. h. sie bildet einen kleinern Winkel mit derselben. Denn fällt man auf die Sekanten AC, AG die Perpendikel ME, MF, von denen ME<MF ist; so ist auch Winkel MAE<MAF. (§. 38. Zus. 10.)

Umgekehrt ist die der durch den Mittelpunkt gehenden nähere auch dem Mittelpunkte des Kreises näher. (§. 38. Zus. 11.)

Zusatz 2. Zwei Sekanten schneiden sich innerhalb des Kreises, wenn ihr gemeinschaftlicher Ausgangspunkt innerhalb des Gegenkreises liegt; liegt dieser aber nicht im Gegenkreise, so können sich die Sekanten nicht innerhalb des vorliegenden Kreises schneiden.

§. 63.

Lehrsatz. Wenn nach einem Nebenkreise von einem Punkte aus, der nicht in dem Gegenkreise liegt, Sekanten gezogen sind, so ist die dem Mittelpunkte des Kreises nähere die größere.

Beweis. Es seyen (Figur 46.) AC, AD zwei Sekanten, von denen AC dem Mittelpunkte M näher liegt, weil Winkel BAC<BAD. Zieht man die Radien MC,

MD; so ist in den Dreiecken AMC, AMD Seite AM=AM; MC=MD; aber Winkel AMC>AMD; daher AC>AD. (§. 31.)

Liegen die beiden Sekanten auf verschiedenen Seiten von AB, wie AC und AG; so mache man Winkel BAD=BAG. Dann sind die Dreiecke AMD, AMG einander gleich, weil AM=AM; MD=MG und Winkel MAD=MAG, und weil die hier mögliche Zweideutigkeit durch die Figur entschieden wird. (§. 41. Zus. 1.) Es ist also AG=AD; daher dem Bewiesenen gemäß AG<AC.

Zusatz 1. Die durch den Mittelpunkt gehende Sekante AB ist also die größte unter allen.

Zusatz 2. Verlängert man die Sekanten bis zum zweiten gemeinschaftlichen Durchschnitte A', dem Gegenpunkte von A, so ist auch von da aus A'C'>A'D' und A'G'; A'B' aber die größte. Daraus folgt: AC'<AD' und AG'; AB' aber am kleinsten. In Worten: Von den äußeren Abschnitten der von einem Punkte, der nicht im Gegenkreise liegt, ausgehenden Sekanten ist der zur größeren gehörige der kleinere; der zur größten gehörige der kleinste.

Für diese äußern Abschnitte gilt der Satz jedoch auch, wenn der gemeinschaftliche Ausgangspunkt innerhalb oder auf der Peripherie des Gegenkreises liegt. Der Beweis hiefür ist dem im Lehrsatze gegebenen ganz ähnlich. —

Die Grenze dieser äußeren Abschnitte, wie der ganzen Sekanten, ist die Tangente — die äußerste Sekante, deren Durchschnitte zusammenfallen. Die Tangente ist also größer als jeder äußere Abschnitt; doch kleiner als jede Sekante.

Zusatz 3. Die vom Mittelpunkte des Kreises gleich weit entfernten Sekanten (wie AD, AG) sind einander gleich, daher auch ihre äußern Abschnitte.

Zusatz 4. Die Differenz der äußern Abschnitte zweier Sekanten, die von einem Punkte ausgehen, ist kleiner, als die Differenz der innern. Denn es ist AC'+C'C>AD'+D'D; daher C'C—D'D>AD'—AC'.

Zusatz 5. Der Bogen AB', als der kürzeste unter allen, welche von A nach dem Nebenkreise gezogen werden können, heißt die Entfernung des Punktes von dem Kreise; vergl. §. 38. Zus. 3.

Zusatz 6. Von zwei Gegenpunkten der Kugelfläche ist immer einer um weniger, als einen Quadranten von einem Nebenkreise entfernt. Denn man lege durch die Gegenpunkte (Figur 47.) A, A' und durch den Mittelpunkt M des Kreises einen Hauptkreis, der in B, B' den Nebenkreis schneidet und es sey $AB \geqq \frac{\pi}{2}$; dann ist $A'B \leqq \frac{\pi}{2}$; also jedenfalls $A'B' < \frac{\pi}{2}$.

§. 64.

Lehrsatz. Unter den Bogen, welche von einem innerhalb des Nebenkreises liegenden Punkte aus nach der Peripherie desselben gehen, ist der durch den Mittelpunkt des Kreises gehende der größte; die Verlängerung desselben rückwärts bis zum entgegengesetzten Punkte der Peripherie ist der kürzeste; von den übrigen Bogen ist der dem größten nähere (d. h. einen kleinern Winkel mit demselben bildende) der größere.

Beweis. Es sey (Figur 48.) A der Punkt, von welchem die Bogen AB, AE, AD u. s. w. gezogen sind, unter denen AB durch den Mittelpunkt M des Kreises geht.

1) Es ist nun $AM + ME > AE$; folglich, da $AB = AM + MB = AM + ME$ ist, auch $AB > AE$. Also ist AB der größte Bogen.
2) Da $AM + AC > MC$, und $MC = MB' = AM + AB'$ ist, so ist $AM + AC > AM + AB'$; folglich $AB' < AC$; also AB' der kleinste Bogen.

3) Da der Winkel MED = MDE ist, so ist AED < ADE; folglich AE > AD; also der dem größten AB nähere Bogen der größere.

4) Macht man auf der andern Seite des Durchmessers BB′ den Winkel BAC′ = BAD; so ist das Dreieck AMC′ = AMD (§. 29.); daher AC′ = AD; also das in 3) Erwiesene auch gültig, wenn die Bogen nicht auf einer Seite des Durchmessers liegen; mithin die Behauptung evident.

Zusatz 1. Zu beiden Seiten des größten und des kleinsten Bogens in gleichen Entfernungen von denselben sind die Bogen gleich.

Zusatz 2. Wenn bei zwei sich schneidenden Sehnen ein Abschnitt der einen größer ist, als ein Abschnitt der andern; so ist der zweite Abschnitt der ersten kleiner, als der zweite Abschnitt der andern Sehne. Denn verlängert man AC′ nach C und AE nach E′, und BAE ist < BAC′, so ist AE > AC′; zugleich ist dann auch B′AE′ < B′AC; also AE′ < AC.

Zusatz 3. Sind aber die beiden ersten Abschnitte der Sehnen sich gleich, so sind es auch die andern beiden.

Zusatz 4. Ist die Sehne FF′ senkrecht auf BB′, so ist AE′ = AE. Da die Abschnitte jeder andern durch A gehenden Sehne ungleiche Winkel mit AB machen, so sind sie ungleich. Zwei Sehnen können sich also nicht beide zugleich halbiren.

Zusatz 5. Fällt man die Perpendikel Mn, Mp auf die Sehnen EE′, CC′, so ist Mn < Mp, weil der Winkel MAn < MAp ist. Die Abschnitte AE′, AC, auf welche die Perpendikel nicht fallen, sind also die kleineren.

Daher läßt der zweite und dritte Zusatz sich so ausdrücken: Der kleinere Abschnitt der größern Sehne ist kleiner, als der der kleinern Sehne. Bei gleichen Sehnen aber sind jene Abschnitte gleich. (Vergl. §. 63. Zus. 2. 3.)

Zusatz 6. Liegt der gemeinschaftliche Ausgangspunkt

zweier Sekanten innerhalb des Gegenkreises (§. 62. Zuſ. 2.), ſo beſteht jede Sekante aus einem halben Hauptkreiſe und einem Sehnenabſchnitte. Je nachdem nun dieſe Sehnenabſchnitte die größeren oder kleineren ſind, iſt die dem Mittelpunkte des Kreiſes nähere Sekante die größere oder die kleinere. Erſteres findet ſtatt, wenn der gemeinſchaftliche Ausgangspunkt der Sekanten jenſeit des Mittelpunkts des Gegenkreiſes liegt; letzteres, wenn er dieſſeit deſſelben liegt. — Liegt er auf den Grenzen, nämlich auf dem Mittelpunkte des Gegenkreiſes, oder auf deſſen Peripherie; ſo ſind alle Sekanten gleich.

§. 65.

Lehrſatz. Wenn von dem Mittelpunkte eines Nebenkreiſes ein Radius nach irgend einem Punkte der Peripherie geht und in dem Endpunkte deſſelben ein Hauptbogen ſenkrecht auf dem Radius errichtet wird; ſo iſt dieſer Hauptbogen eine (ſphäriſche) Tangente des Nebenkreiſes.

Beweis. Steht der Hauptbogen B C (Figur 49.) in A ſenkrecht auf dem Radius MA, ſo iſt MA der kürzeſte Bogen von M nach BC. (§. 38., §. 8. Anmerk.) Daher ſind alle übrigen Punkte in BC um mehr, als den Radius MA von dem Mittelpunkte M entfernt, liegen alſo außerhalb des Nebenkreiſes. Folglich berührt BC nur in dem Punkte A den Nebenkreis.

Zuſatz 1. Umgekehrt: Jede Tangente ſteht ſenkrecht auf dem nach dem Berührungspunkte gehenden Radius. Denn iſt A der Berührungspunkt der Tangente BC, ſo iſt MA der kürzeſte Bogen unter allen, welche von M nach BC gehen; wäre nun MA nicht ſenkrecht auf BC, ſo würde ein anderer Bogen ſenkrecht und kürzer, als MA ſeyn; was nicht möglich iſt.

Zuſatz 2. In einem und demſelben Punkte der Peri-

pherie eines Nebenkreiſes iſt nur eine Tangente an denſelben möglich; denn eine zweite Tangente müßte ebenfalls auf demſelben Radius und in demſelben Punkte ſenkrecht ſtehen; was nicht möglich iſt.

Zuſatz 3. Der auf eine Tangente im Berührungspunkte ſenkrechte Hauptbogen geht durch den Mittelpunkt des Nebenkreiſes; denn ſonſt würde der Radius nach dem Berührungspunkte wieder ein zweites Perpendikel ſeyn.

Zuſatz 4. Das von dem Mittelpunkte des Kreiſes auf die Tangente gefällte Perpendikel trifft ſie im Berührungspunkte. Denn wäre dies nicht, ſo würde der Radius nach dem Berührungspunkte ein zweites Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Tangente ſeyn.

Zuſatz 5. Verlängert man den Radius AM über M hinaus, ſo geht er durch den Pol der Tangente. Aus den Zuſätzen 1., 3. und 4. folgt: Der Berührungspunkt, der Pol der Tangente und der Mittelpunkt des Kreiſes liegen immer in einem und demſelben Hauptkreiſe.

Anmerk. Unter dem Pole einer Tangente iſt von den beiden Polen des berührenden Hauptkreiſes derjenige gemeint, welcher auf der Seite des berührten Nebenkreiſes liegt, oder: welcher dem Mittelpunkte des Nebenkreiſes der nächſte iſt. Er wird gefunden, wie in Zuſ. 5. angedeutet iſt.

§. 66.

Lehrſatz. Die Pole aller Tangenten eines Nebenkreiſes liegen wieder in einem Nebenkreiſe, der mit jenem Kreiſe gemeinſchaftlichen Mittelpunkt hat und deſſen Radius das Komplement des Radius jenes Kreiſes iſt.

Beweis. Es ſey (Figur 49.) A der Berührungspunkt der Tangente BC und von A durch den Mittelpunkt M des Kreiſes der Quadrant AP gezogen; ſo iſt P der Pol der

Tangente, deſſen Entfernung vom Mittelpunkte der Bogen $PM=\left(\frac{\pi}{2}-AM\right)$ iſt. Da der Pol jeder andern Tangente auch um $\left(\frac{\pi}{2}-AM\right)$ von M abſteht; ſo ſind alle Tangentenpole gleich weit von M entfernt; liegen alſo in einem Nebenkreiſe, deſſen Radius $=\frac{\pi}{2}-AM$, alſo das Komplement AM iſt.

Zuſatz 1. Inſofern das Element des Nebenkreiſes, welches derſelbe mit der Tangente gemein hat, als Theil eines Hauptkreiſes betrachtet werden kann, iſt der Pol der Tangente auch der Pol dieſes Elementes. Sonach hat jedes Element eines Nebenkreiſes ſeinen Pol und die Pole aller Elemente liegen in einem Nebenkreiſe von den im Lehrſatze ausgeſprochenen Eigenſchaften. Wir nennen dieſen Kreis den Polarkreis jenes Kreiſes.

Zuſatz 2. Iſt r der (ſphäriſche) Radius eines Nebenkreiſes und r′ der ſeines Polarkreiſes, ſo iſt $r+r'=\frac{\pi}{2}$. Je größer r iſt, deſto kleiner iſt r′; iſt $r=\frac{\pi}{2}$; ſo verſchwindet r′. Der Polarkreis des Hauptkreiſes geht alſo in einen Punkt, den Pol deſſelben, zuſammen.

Zuſatz 3. Auch bei Kreiſen iſt die Polarität gegenſeitig, d. h. iſt ein Kreis der Polarkreis eines andern, ſo iſt auch letzterer der Polarkreis des erſteren.

Zuſatz 4. Die Polarkreiſe zweier Gegenkreiſe ſind ſelbſt wieder Gegenkreiſe.

Zuſatz 5. In dem Gegenkreiſe eines Polarkreiſes liegen die zweiten (negativen) Pole der Tangenten. Daher hat jeder Nebenkreis zwei Polarkreiſe, die man als poſitive und negative unterſcheiden kann.

Zuſatz 6. Jeder Hauptkreis, deſſen Pol auf der Pe-

ripherie des Polarkreiſes liegt, iſt eine Tangente des andern Kreiſes.

§. 67.

Aufgabe. An einen gegebenen Nebenkreis eine Tangente zu ziehen, welche durch einen gegebenen Punkt der Kugelfläche geht.

Auflöſung. Es ſey (Figur 50.) cbd der gegebene Kreis und O der gegebene Punkt, durch welchen die Tangente gehen ſoll. Man konſtruire den Polarkreis DAC des gegebenen; beſchreibe um O als Pol einen Hauptkreis BAB', der in A und B den Polarkreis ſchneide; um A ſowohl, als B beſchreibe man einen Hauptkreis; ſo iſt jeder eine Tangente von der geforderten Eigenſchaft.

Beweis. Da der Durchſchnittspunkt A auf der Peripherie des Polarkreiſes liegt, ſo iſt der um A beſchriebene Hauptkreis eine Tangente an cbd; und da A von O um einen Quadranten entfernt iſt (indem O der Pol des durch A gehenden Hauptkreiſes iſt), ſo geht die Tangente durch O. — Ebenſo läßt ſich für B die Richtigkeit der Auflöſung beweiſen.

Zuſatz 1. Die Berührungspunkte beider Tangenten werden gefunden, wenn von den Polen A, B durch den Mittelpunkt M Bogen geführt werden, deren Durchſchnitte a, b mit dem gegebenen Kreiſe bezüglich die Berührungspunkte ſind.

Zuſatz 2. An einen gegebenen Nebenkreis läßt ſich von jedem Punkte der Kugelfläche, der weder in dem Kreiſe ſelbſt noch in ſeinem Gegenkreiſe liegt, eine Tangente ziehen.

Denn die Möglichkeit der Tangente hängt von der Möglichkeit der Durchſchnittspunkte A, B ab. Legt man nun durch M und den gegebenen Punkt O einen Hauptkreis, der in b' den Gegenkreis c'b'd' des gegebenen Kreiſes cbd ſchneidet, den Polarkreis CBD aber in E trifft; ſo iſt der Bogen

$Eb' = \frac{\pi}{2}$, weil $ME + M'b' = ME + Mb = \frac{\pi}{2}$ ist. (§. 66. Zuf. 2.) Liegt alſo O nicht innerhalb des Gegenkreiſes c'b'd', ſondern außerhalb; ſo iſt $OE < \frac{\pi}{2}$; und es ſchneidet der um O beſchriebene Hauptkreis den Polarkreis. Liegt aber O in b', ſo berührt der um O beſchriebene Hauptkreis den Polarkreis in E; giebt alſo doch einen Tangentenpol.

Daß keine Tangente möglich iſt, wenn O innerhalb des Gegenkreiſes liegt, folgt aus §. 59.

Zuſatz 3. Die Bogen zweier von einem Punkte nach einem Kreiſe gehender Tangenten, welche zwiſchen dem gemeinſchaftlichen Ausgangspunkte und den Berührungspunkten enthalten ſind, ſind gleich.

Denn die Bogen Ob, Oa ſind einander gleich, weil die an b, a rechtwinklichen Dreiecke MbO, MaO nach §. 29. Zuf. gleich ſind.

Zuſatz 4. Daher halbirt auch der vom Mittelpunkte des Kreiſes nach dem Durchſchnitte der beiden Tangenten gezogene Bogen (MO) den Winkel der Tangenten.

§. 68.

Aufgabe. An zwei gegebene Kreiſe auf der Kugelfläche eine Tangente zu ziehen.

Auflöſung. Es ſeyen (Figur 51.) ABC und DEF die gegebenen Kreiſe und M, N ihre Mittelpunkte. Man beſchreibe ihre Polarkreiſe abc, dbe, welche ſich in b ſchneiden. Um b als Pol beſchreibe man einen Hauptkreis, ſo berührt dieſer beide Kreiſe.

Beweis. Da jeder Hauptkreis, deſſen Pol auf der Peripherie des Polarkreiſes liegt, den andern Kreis berührt; ſo iſt die Richtigkeit der Auflöſung evident.

Zuſatz 1. Der zweite Durchſchnitt der beiden Polarkreiſe giebt eine zweite, und die beiden Durchſchnitte des

Polarkreiſes dbe mit dem negativen Polarkreiſe a′b′c′ geben noch eine dritte und vierte Tangente an beide gegebene Kreiſe. Die erſten beiden Tangenten ſind ſo beſchaffen, daß die gegebenen Kreiſe beide auf einer und derſelben Seite des berührenden Hauptkreiſes liegen; die letzten beiden aber gehen zwiſchen den gegebenen Kreiſen durch. Letzteres folgt aus dem Erſteren; denn liegen die Kreiſe ABC, DEF innerhalb eines jeden der erſten beiden Berührungskreiſe; ſo liegt der Gegenkreis A′B′C′ mit DEF innerhalb der andern beiden; weil a′b′c′ der poſitive Polarkreis für A′B′C′ iſt. Daher muß jede der letzteren Tangenten die Kreiſe DEF, ABC von einander ſcheiden.

Zuſatz 2. Je nachdem ſich die poſitiven Polarkreiſe nur berühren oder ſich gar nicht treffen, iſt von den erſten beiden Tangenten nur eine möglich, oder gar keine. Eben das gilt von den ungleichartigen Polarkreiſen.

Zuſatz 3. Die beiden negativen Polarkreiſe geben dieſelben Tangenten, wie die poſitiven; denn die Durchſchnitte der erſteren ſind die Gegenpunkte der Durchſchnitte der letztern. — So giebt auch der negative Polarkreis von DEF mit dem poſitiven von ABC die dritte und vierte Tangente wieder.

So giebt es alſo im Allgemeinen vier Tangenten an zwei Nebenkreiſe, und nur vier, von denen indeß in beſonderen Fällen nur eine, zwei, oder drei möglich ſeyn können.

Zuſatz 4. Bezeichnet man die Radien der Kreiſe ABC, DEF mit r, r′; die ihrer Polarkreiſe mit ϱ, ϱ′; die Entfernung MN ihrer Mittelpunkte mit d; ſo muß, wenn die poſitiven Polarkreiſe ſich treffen ſollen, $\varrho+\varrho' \geqq d$ ſeyn. Setzt man für ϱ, ϱ′ ihre Werthe $\frac{\pi}{2}-r$; $\frac{\pi}{2}-r'$; ſo iſt jene Bedingungsgleichung $r+r'+d \leqq \pi$; oder $r+r' \leqq \overline{d}$.

Für die Polarkreiſe dbe und a′b′c′ iſt M′ für M, alſo

d für d zu setzen; daher ist die Bedingung für die Möglichkeit der dritten und vierten Tangente die Gleichung $r + r' \leqq d$. In beiden Gleichungen deutet das Zeichen $<$ zwei, das Zeichen $=$ eine Tangente an.

§. 69.

Aufgabe. An einen gegebenen Kreis eine Tangente so zu führen, daß sie mit einem zweiten gegebenen Kreise einen Winkel von gegebener Größe bilde.

Auflösung. Es sey (Figur 52.) ABC der gegebene Kreis, an welchen die Tangente zu führen ist; der Winkel, welchen sie mit dem zweiten gegebenen Kreise DEF bilden soll, sey $= w$.

Man konstruire den Polarkreis abc des ersten Kreises; beschreibe um den Mittelpunkt N des zweiten mit dem Radius $= (\pi - w)$ einen Kreis dbe, der in b den Polarkreis treffe und beschreibe endlich um b als Pol einen Hauptkreis; so genügt dieser der Aufgabe.

Eine zweite Tangente giebt der zweite Durchschnitt der Kreise abc und dbe.

Beweis. Da der Winkel zweier Kreise das Supplement ihres Polabstandes ist und b von N um $(\pi - w)$ absteht, so bildet der um b beschriebene Hauptkreis mit DEF einen Winkel $= w$ und berührt den Kreis ABC, weil sein Pol in dessen Polarkreise liegt.

Zusatz 1. Die Durchschnitte des Kreises dbe mit dem negativen Polarkreise geben wieder eine dritte und eine vierte Tangente, welche beide der Aufgabe genügen und sich von den beiden ersteren dadurch unterscheiden, daß jede der letzteren den Kreis ABC von dem andern Kreise DEF, oder einem Theile desselben trennt, oder doch im Allgemeinen trennen kann; während jede der ersteren Tangenten den ersten

Kreis mit dem zweiten, oder doch mit einem Theile desselben einschließt oder doch im Allgemeinen einschließen kann.

Zusatz 2. Ist e'b''d' der Gegenkreis von ebd, so geben dessen Durchschnitte mit den beiden Polarkreisen abc, a'b'c' vier Tangenten an ABC, welche aber mit DEF den Winkel $=(\pi-w)$ bilden. Der Nebenwinkel desselben ist $=w$; dasselbe liegt aber nach der entgegengesetzten Richtung, wie der in der Auflösung gemeinte.

§. 70.

Lehrsatz. *Je nachdem der Durchschnitt zweier Sehnen außerhalb des Kreises, oder auf der Peripherie oder innerhalb desselben liegt, muß der ihre Pole verbindende Bogen den Polarkreis schneiden, oder nur berühren, oder ganz außerhalb desselben liegen.*

Anmerk. Unter dem Durchschnitte der Sehnen ist hier von den beiden Gegenpunkten, in welchen sich die Hauptkreise der Sehnen schneiden, der dem Nebenkreise nächste gemeint, der jedenfalls um weniger, als einen Quadranten von demselben absteht. (§. 63. Zus. 6.)

Beweis. 1) Es sey (Figur 53.) der Durchschnitt der Sehnen AB, A'B' außerhalb des Kreises in C und die Pole der Sehnen seyen P, P'. Da der Durchschnitt zweier Hauptkreise der Pol des durch ihre Pole gehenden Hauptkreises ist (§. 9. Zus.); so ist C der Pol des Bogens PP'. Zieht man von C durch den Mittelpunkt M einen Bogen, der zunächst in D den Kreis ABB'A' schneidet, den Polarkreis aber in F trifft; so ist $DF=\frac{\pi}{2}$, also $CF>\frac{\pi}{2}$. Es liegt also zwischen F und C ein Punkt E, der von C um einen Quadranten entfernt ist, und der in dem durch P, P' gehenden um C als Pol beschriebenen Hauptkreise liegt. Ist dies aber, so schneidet der Bogen PP' den Polarkreis.

2) Liegt der Durchschnitt der Sehnen auf der Peripherie, wie bei AD, A'D; so ist $DF=\frac{\pi}{2}$; der Bogen P'P geht also durch F. Da aber jeder andere von D nach der Peripherie des Polarkreises gehende Bogen kleiner als DF, also kleiner als ein Quadrant ist (§. 64.), während alle Punkte des Bogens PP' um $\frac{\pi}{2}$ von D entfernt sind; so berührt PP' den Polarkreis blos in F.

3) Liegt der Durchschnitt der Sehnen innerhalb des Kreises, wie bei den Sehnen AG, A'G', die sich in C' schneiden; so ist $C'F<\frac{\pi}{2}$. Der um C' als Pol beschriebene Hauptkreis kann also den Polarkreis gar nicht treffen, da der um D beschriebene ihn nur berührte.

Zusatz. Die Richtigkeit der Umkehrung des Lehrsatzes ist evident.

§. 71.

Lehrsatz. Ist ein sphärisches Polygon um einen Nebenkreis beschrieben, so ist das Polarpolygon ein in den Polarkreis beschriebenes.

Beweis. Es sey (Figur 54.) ABCD.... ein Polygon um den Kreis abc....., den es in den Punkten a, b, c,.... berührt; der Polarkreis sey a'b'A'B'. Zieht man von den Berührungspunkten a, b, c,.... durch den Mittelpunkt M der Kreise Bogen bis zu ihren zweiten Durchschnitten A', B', C',... mit dem Polarkreise, so sind A', B', C'.... die Pole der Tangenten AB, BC, CD..... Verbindet man nun diese Pole durch Sehnen A'B', B'C'....., so ist A'B'C'.... das Polarpolygon von ABCD... und ein in den Polarkreis eingeschriebenes.

Zusatz. Ist umgekehrt ein sphärisches Polygon in ei-

nen Kreis beschrieben, so ist sein Polarpolygon um den Polarkreis beschrieben. Denn ist A'B'C'.... in den Kreis a'b'c'A'.... eingeschrieben, so geben die Pole B, C,.... der Sehnen A'B', B'C'..... lauter Tangenten in den Polarkreis ABCD.... (§. 70.); also ein um den Polarkreis beschriebenes Polygon, welches das Polarpolygon des vorigen ist.

§. 72.

Lehrsatz. Ist ein sphärisches Polygon ein regelmäßiges, so läßt sich ein Nebenkreis, sowohl um, als in dasselbe beschreiben.

Beweis. Es sey (Figur 55.) ABCD.... ein regelmäßiges Polygon, d. h. AB=BC=CD....., und Winkel A=B=C=..... Man halbire die Seiten desselben in a, b, c,.... und errichte in a und b Perpendikel auf AB und BC, deren Durchschnitt M sey. Von M aus ziehe man nach den übrigen Halbirungspunkten c, d...., desgleichen nach allen Winkelspitzen B, C, D..... Bogen.

Da sind nun

1) die an a, b rechtwinklichen Dreiecke MaB, MbB einander gleich, weil aB=bB und MB=MB; folglich Ma=Mb; $b'=b''=\frac{1}{2}B$.

2) Die an b rechtwinklichen Dreiecke MbB, MbC sind einander gleich, weil Bb=Cb und Mb=Mb; daher MB=MC; b''=c'; folglich $c'=\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}C=c''$.

3) Dreieck MbC= Dreieck McC, weil Cb=Cc, und MC=MC; daher Mc=Mb=Ma; auf gleiche Weise ergiebt sich die Gleichheit der übrigen Dreiecke, woraus MB=MC=MD..... und Ma=Mb=Mc..... folgt.

4) Endlich sind die Katheten Ma, Mb, Mc,.... kleiner

als Quadranten, weil die ihnen gegenüberliegenden halben Polygonwinkel b', c', d'... spitze Winkel sind; die Hypotenusen MB, MC, MD,... sind ebenfalls $< \frac{\pi}{2}$, weil auch die andern Katheten aB, bC,.... $< \frac{\pi}{2}$ sind.

Hieraus ist nun evident,

1) daß das Polygon ABCD... in einem Nebenkreise liegt, dessen Mittelpunkt in M, dessen Radius = MB ist;
2) daß die Mittelpunkte a, b, c,.... in einem Nebenkreise liegen, dessen Mittelpunkt auch M, dessen Radius = Ma ist, und an welchen die Seiten AB, BC CD,... Tangenten sind — also, daß das Polygon ABCD... ein um diesen Kreis beschriebenes ist.

Zusatz. Die Bogen von dem Mittelpunkte eines regelmäßigen sphärischen Polygones nach den Ecken desselben halbiren die Winkel des Polygones (§. 67. Zus. 4.), und die nach den Mittelpunkten der Seiten gezogenen Bogen stehen auf denselben senkrecht. (§. 61. Zus. 1.)

§. 73.

Lehrsatz. 1) Ist ein sphärisches gleichseitiges Polygon in einen Kreis beschrieben, so ist es ein regelmäßiges. 2) Ist ein sphärisches gleichwinkliches Polygon um einen Kreis beschrieben, so ist es auch ein regelmäßiges.

Beweis. 1) Es sey das Polygon ABCD... (Figur 56.) ein gleichseitiges in dem gleichnamigen Kreise. Zieht man von dem Mittelpunkte M dieses Kreises die Radien MA, MB, MC....; so sind die dadurch entstandenen gleichschenklichen Dreiecke wegen Gleichheit dreier Seiten unter sich gleich; also Winkel b' = b''; c' = c'' u. s. w. Der

Gleichschenklichkeit wegen ist auch $b' = a$; $c' = b''$ u. s. w.; daher alle diese Winkel, mithin auch die Winkel des Polygones einander gleich, das daher regelmäßig ist.

2) In Figur 55. sey das Polygon ABCD.... gleichwinklich und um den Kreis abc.... beschrieben, den es in den Punkten a, b, c,... berührt. Zieht man vom Mittelpunkte M nach den Berührungspunkten Radien Ma, Mb, Mc,... welche auf den Tangenten senkrecht stehen; desgleichen nach den Winkelspitzen die Bogen MB, MC..., welche jeden Winkel halbiren (§. 67. Zus. 4.); so hat man $b' = b''$; $c' = c''$; und da $B = C$ ist, auch $b'' = c' = c'' = d'$..... Aus $b'' = c'$ folgt $MB = MC$, hieraus aber die Gleichheit der an b rechtwinklichen Dreiecke MbB, MbC, woraus $Bb = Cb$ folgt. Jede Seite des Polygones wird also durch den nach dem Berührungspunkte gehenden Radius halbirt. Nach §. 67. Zus. 3. ist aber $Cb = Cc$; daher auch $BC = DC$. So läßt sich auf alle Seiten des Polygones schließen, das also auch gleichseitig, mithin ein regelmäßiges ist.

Zusatz. Da das Polarpolygon eines gleichseitigen im Kreise ein gleichseitiges um den Polarkreis, und das eines gleichwinklichen um den Kreis ein gleichseitiges im Polarkreise ist, so lassen sich obige Sätze einer aus dem andern leicht herleiten.

Anmerk. Der Satz: „Das gleichseitige Polygon um einen „Kreis und das gleichwinklische in einem Kreise ist ein regelmäßi„ges Polygon" — ist nicht allgemein, sondern nur dann gültig, wenn die Zahl der Ecken eine ungerade ist. Doch bedingt der Kreis, wenn die Eckenzahl eine gerade ist, eine Regelmäßigkeit so weit, daß bei gleichen Seiten nur zweierlei Winkel, bei gleichen Winkeln nur zweierlei Seiten vorkommen können, die so auf einander folgen, daß ein Größeres immer mit einem Kleinern abwechselt. Der Beweis, der in dem Obigen hinreichende Andeutung findet, wird hier übergangen, da die Sache für unsern Zweck unwesentlich ist.

§. 74.

Lehrſatz. Unter den ſphäriſchen Dreiecken, welche eine Sehne eines Nebenkreiſes zur gemeinſchaftlichen Grundſeite und ihre Spitzen in der Peripherie deſſelben Kreiſes haben, iſt das ſchiefere das kleinere.

Beweis. In dem Kreiſe (Figur 57.) CC'BA ſey auf der Sehne AB als Grundſeite das Dreieck ACB ein gleichſchenkliches und AC'B, AC''B zwei ſchiefe Dreiecke, deren Seiten AC'', BC' ſich in D ſchneiden. Da der Winkel CAB=CBA, ſo iſt DAB<DBA; folglich DB>DA; daher DC''<DC'. (§. 64. Zuſ. 2.) Macht man alſo Db =DB; Dc=DC'' und zieht bc, ſo iſt das Dreieck Dbc= DBC''; aber Dbc<DAC'; alſo auch Dreieck DC''B< DC'A. Addirt man hiezu ADB=ADB, ſo folgt AC''B <AC'B.

Zuſatz 1. Das gleichſchenkliche Dreieck ABC iſt alſo das größte unter allen.

Zuſatz 2. Die Dreiecke zu beiden Seiten des gleichſchenklichen, welche gleich ſchief ſtehen, ſind von gleichem Flächenraume.

§. 75.

Lehrſatz. Alle Peripheriewinkel in einem und demſelben größeren Abſchnitte eines Nebenkreiſes ſind um eine und dieſelbe Differenz kleiner als die Summe der beiden Winkel, welche durch die Schenkel der Peripheriewinkel mit der ihre Endpunkte verbindenden Sehne gebildet werden.

Beweis. Solche Peripheriewinkel ſeyen AC'B, AC''B. (Figur 58.) Die Radien MA, MB, MC', MC'' geben lauter gleichſchenkliche Dreiecke und es iſt der Winkel MAC'

$=MC'A$; $MBC'=MC'B$; daher $MC'A+MC'B=MAC'+MBC'=BAC'+ABC'-MAB-MBA$; also $AC'B=BAC'+ABC'-2MAB$.

Da die Winkel MAB, MBA dieselben bleiben, für jede Lage von C', die nur die Winkel BAC', ABC' ändert, so ist evident, daß auch für jeden andern Punkt der Peripherie, etwa C'', muß $AC''B=BAC''+ABC''-2MAB$ seyn.

Zusatz 1. In dem kleineren Abschnitte ADB ist jeder Peripheriewinkel um dieselbe Differenz größer, als die Summe der durch seine Schenkel mit der Sehne gebildeten Winkel. Denn es ist der Winkel $MDA=MAD=MAB+BAD$; $MDB=MBD=MBA+ABD$; daher $MDA+MDB=BAD+ABD+MAB+MBA$; oder $BDA=BAD+ABD+2MAB$.

Zusatz 2. Bezeichnet man die Winkel BAC', ABC', AC'B der Reihe nach mit A', B', C; und BAD, ABD, ADB mit A'', B'', D, die konstante Differenz 2MAB mit U; so ist nach dem Erwiesenen $C=A'+B'-U$; $D=A''+B''+U$.

Denkt man sich die Sehne AB dem Mittelpunkt M mehr und mehr genähert, so nimmt U beständig ab; geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so verschwindet U und es wird $C=A'+B'$; $D=A''+B''$. Weiterhin nimmt U das entgegengesetzte Zeichen an; es wird nämlich, wenn die Sehne über den Mittelpunkt gegangen ist, der größere Abschnitt zum kleineren und daher $C=A'+B'+U$; $D=A''+B''-U$. Betrachtet man nun U als positiv, wenn es (nämlich die Winkel MAB, MBA) mit dem betreffenden Peripheriewinkel auf einer und derselben Seite der Sehne liegt; im andern Falle aber als negativ; so ist die Gleichung $C=A'+B'-U$ der allgemeingültige Ausdruck für jeden Peripheriewinkel, er mag in dem größern Kreisabschnitte liegen oder im kleinern.

Zuſatz 3. Da $C = A' + B' - U$, und

$D = A'' + B'' + U$ iſt, ſo iſt, wenn

man addirt $C + D = A' + A'' + B' + B''$, oder, wenn man $A' + A'' = C'AD$ mit A; $B' + B'' = C'BD$ mit B bezeichnet

$$C + D = A + B.$$

Den ſphäriſchen Vierecken alſo, welche in einem Kreiſe ihre Ecken haben, iſt die Eigenſchaft gemein, daß jede zwei Diagonalwinkel dieſelbe Summe geben, wie die andern beiden.

Da aber $A + B + C + D > 2\pi$ iſt, (weil das Viereck aus zwei Dreiecken beſteht); ſo iſt $C + D > \pi$; und $A + B > \pi$. Dieſe ſphäriſchen Vierecke unterſcheiden ſich alſo von den ebenen wieder dadurch, daß die Summe je zweier Diagonalwinkel größer als zwei Rechte iſt.

Zuſatz 4. Die ſphäriſchen Vierecke, welche um einen Kreis beſchrieben ſind, haben die Eigenſchaft, daß die Summen je zweier einander gegenüberliegenden Seiten ſich gleich ſind. Denn das Polarviereck des vorigen iſt ein um den Polarkreis beſchriebenes, in welchem $\overline{A} + \overline{B} = \overline{C} + \overline{D}$ iſt, weil oben $A + B = C + D$ war. Zieht man die Ungleichungen $C + D > \pi$; $A + B > \pi$; jede von der Gleichung $2\pi = 2\pi$ ab, ſo erhält man $\overline{C} + \overline{D} < \pi$; $\overline{A} + \overline{B} < \pi$. Alſo iſt in den genannten Vierecken die Summe jeder zwei einander gegenüberſtehenden Seiten kleiner, als ein halber Hauptkreis.

Zuſatz 5. Der Flächenraum T des auf einer Sehne als der Grundſeite liegenden Dreieckes, das ſeine Spitze in der Peripherie des Kreiſes hat, wie ABC' iſt $= A' + B' + C - \pi$, oder, da $A' + B' = C + U$ iſt, $T = 2C + U - \pi$. Iſt die Sehne ein Durchmeſſer, alſo $U = 0$, ſo iſt $T = 2C - \pi$.

Hieraus folgt, daß $C > \frac{\pi}{2}$ iſt. Der Winkel im Halbkreiſe iſt alſo immer ein ſtumpfer.

Zusatz 6. Unter den Peripheriewinkeln auf einer Sehne ist derjenige, dessen Schenkel ein schleferes Dreieck auf der Sehne bilden, der kleinere.

Denn nimmt man (Figur 58.) die Dreiecke ABC', ABC'', deren Flächenräume mit T', T'' bezeichnet seyen, so ist nach vorigem Zusatze $T'=2C'+U-\pi$; $T''=2C''+U-\pi$; daher ist $2C'=\pi-U+T'$ oder $2C'=\overline{U}+T'$; eben so $2C''=\overline{U}+T''$. Da nun nach §. 74. $T'>T''$ ist, so folgt $2C'>2C''$, oder $C'>C''$.

Der größte unter diesen Peripheriewinkeln ist also der im gleichschenklichen Dreiecke, C. Denkt man sich diesen nach C', C'' hin rückend, so wird er immer kleiner. — Sein Minimum ist in B, wo AC mit AB zusammenfällt; denn da ist $T=O$; also $2C=\overline{U}$, oder $C=\frac{1}{2}\overline{U}$, gleich dem Komplemente von MBA. Zieht man an B die sphärische Tangente EF, so ist der Winkel ABE, als Komplement von $MBA\left(=\frac{1}{2}U\right)$, diese Grenze des Peripheriewinkels. Wirklich fällt auch der Schenkel CB, indem er bei dem Zusammengehen des Punktes C mit B verschwindet, in die Richtung der Tangente und bildet mit dem andern auf AB fallenden Schenkel AC den Winkel ABE.

Zusatz 7. Für die Peripheriewinkel im andern Kreisabschnitte ist die Grenze $=\frac{1}{2}(\pi+U)=ABF$.

Zusatz 8. Die Grenze für die Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter; denn da ist $U=O$.

Zusatz 9. Der Lehrsatz nebst den daraus gezogenen Folgerungen ist auch gültig, 1) wenn die Peripheriewinkel auf verschiedenen, aber gleichen Sehnen und Abschnitten eines und desselben Kreises stehen; 2) wenn sie in verschiedenen aber gleichen Kreisen auf gleichen Sehnen und Abschnitten liegen; wie leicht einzusehen ist.

§. 76.

Lehrsatz. Die Spitzen derjenigen auf gemeinschaftlicher Grundseite liegenden sphärischen Dreiecke, deren Winkel an der Spitze um eine und dieselbe Differenz kleiner oder größer, als die respektive Summe der an der Grundseite liegenden Winkel sind, liegen auf der Peripherie eines Kreises, in welchem jene gemeinschaftliche Grundseite eine Sehne ist.

Beweis. Es seyen (Figur 59.) ABC, ABC′ zwei solche Dreiecke, in denen CAB+CBA—ACB=C′AB+C′BA—AC′B ist. Um das Dreieck ABC sey ein Kreis beschrieben. Träfe dieser die Seite AC′ nicht in dem Punkte C′, so müßte er sie entweder zwischen A und C′, etwa in C″; oder auf deren Verlängerung über C′ in einem Punkte C‴ schneiden. Er schneide sie in C″; so ist nach vorigem Lehrsatze CAB+CBA—ACB=C″AB+C″BA—AC″B; daher wegen gegenwärtiger Voraussetzung C″AB+C″BA—AC″B=C′AB+C′BA—AC′B oder, da C″AB=C′AB ist, C″BA—AC″B=C′BA—AC′B; oder C″BA+AC′B=C′BA+AC″B; nimmt man auf beiden Seiten C″BA weg, so erhält man AC′B=C″BC′+AC″B, oder AC″B=AC′B—C″BC′; was unmöglich ist. (§. 24. Zus. 5.)

Also kann der um das Dreieck ABC gelegte Kreis die Seite AC′ nicht zwischen A und C′ treffen. Träfe er sie in C‴, so giebt die Wiederholung obiger Schlüsse als Bedingung AC′B=AC‴B—C‴BC′; was ebenfalls unmöglich ist. Daher ist der Satz evident.

Sind die Winkel an der Spitze um gleiche Differenzen **größer**, als die respektiven Summen der an der Grundseite liegenden Winkel, so ergeben dieselben Schlüsse die Richtigkeit der Behauptung.

Zusatz 1. In dem ersten Falle, wenn nämlich die

Winkel an der Spitze kleiner sind, als die Summe der Winkel an der Grundseite, liegen die Dreiecke im größern Abschnitte des Kreises; denn läge ABC im kleineren durch die Sehne AB gebildeten Abschnitte des umschriebenen Kreises, so würde ein Widerspruch mit §. 75. entstehen. Daher liegen die Dreiecke im zweiten Falle in dem kleinern Kreisabschnitte.

Zusatz 2. Aus dieser Umkehrung ergiebt sich auch die Richtigkeit der Umkehrung des dritten und vierten Zusatzes im vorigen §. Nämlich:

1) Sind die Summen je zweier Diagonalwinkel eines sphärischen Viereckes gleich, so läßt sich ein Kreis um das Viereck beschreiben.
2) Sind die Summen je zweier einander gegenüber stehenden Seiten eines sphärischen Viereckes gleich, so läßt sich ein Kreis in das Viereck einschreiben.

§. 77.

Erklärung. 1) Ein sphärisches Dreieck liegt zwischen zwei Nebenkreisen, wenn zwei seiner Spitzen in der Peripherie des einen, die dritte in der Peripherie des andern Kreises liegt.

2) Ein sphärisches Viereck liegt zwischen zwei Nebenkreisen, wenn zwei Ecken desselben, die nicht Diagonalecken sind, in der Peripherie des einen, die andern beiden aber in der Peripherie des ändern Kreises liegen.

§. 78.

Lehrsatz. Alle sphärische Dreiecke, welche auf derselben Grundseite und zwischen denselben Gegenkreisen liegen, haben gleichen Flächenraum.

Beweis. (Figur 60.) Zwischen den Gegenkreisen ABC', A'B'C sey auf der Sehne AB als Grundseite das

Dreieck ABC errichtet und deſſen Seiten AC, AB über A, B verlängert bis zu ihrem zweiten Durchſchnitte C', der als Gegenpunkt von C in der Peripherie des Gegenkreiſes ABC' liegt. So hat man das Nebendreieck ABC' des vorigen; ein in den Kreis ABC' eingeſchriebenes, deſſen Flächenraum $T'=2C+U-\pi$ iſt. (§. 75. Zuſ. 5.) Der Flächenraum der Spindel C'ABC iſt $=2C$. Bezeichnet man alſo mit T den Flächenraum ABC, ſo iſt

$$T+T'=2C;$$ hievon die Gleichung

$$T'=2C+U-\pi$$ abgezogen,

giebt ..... $T=\pi-U=\overline{U}$.

Da der Werth von U nur von der Sehne AB und der Größe des Radius des Nebenkreiſes abhängt, ſo haben alle Dreiecke auf der Grundſeite AB und zwiſchen denſelben Gegenkreiſen den nämlichen Flächenraum.

Zuſatz 1. Wegen §. 75. Zuſ. 9. läßt ſich der Lehrſatz allgemeiner ſo ausſprechen: Alle ſphäriſche Dreiecke auf gleichen Grundſeiten und zwiſchen reſpektiven gleichen Gegenkreiſen haben gleichen Flächenraum.

Zuſatz 2. Wie ABC als Nebendreieck von ABC' den konſtanten Flächenraum $\pi-U$ hat, ſo hat das Nebendreieck von ABD (im andern Kreisabſchnitte) den konſtanten Flächenraum $\pi+U$, weil U für ABD das entgegengeſetzte Zeichen annimmt. (§. 75. Zuſ. 2.)

Das Nebendreieck von ABD iſt ABD', wo D' den Gegenpunkt von D andeutet. Alle Dreiecke alſo, wie ABD' haben den Flächenraum $\pi+U$; während die vorher erwähnten, wie ABC, gleich $\pi-U$ ſind.

Beiderlei Dreiecke haben einerlei Grundſeiten und liegen zwiſchen denſelben Gegenkreiſen; ſie unterſcheiden ſich aber dadurch von einander, daß die einen *über*, die andern *unter* der gemeinſchaftlichen Grundſeite liegen.

Zuſatz 3. Die Entſcheidung, wie weithin auf der Peripherie CA'B' die Spitze C liegen könne, ergiebt ſich aus

der Lage des Gegenpunktes C'. Die Spitze C' des Nebendreieckes ABC' kann nämlich überall auf dem Peripherieabschnitte AC'B liegen, nur nicht auf dem Implement ADB, weil sonst das Dreieck ABC' in das Dreieck ABD des andern Kreisabschnittes übergehen würde. Folglich kann der Gegenpunkt C überall auf dem Peripherieabschnitte A'CB', nur nicht auf dem Implemente A'D'B' liegen. Hieraus folgt nun auch, daß die Spitzen der Dreiecke unter der Basis AB, wie ABD', ihre Spitzen von B' über D' bis A' haben können.

Zusatz 4. Kommt die Spitze C auf eine der Grenzen A', B', etwa auf A'; so geht das Dreieck ABC über in eine Spindel. Denn es wird dann AC=AA', ein halber Hauptkreis; BC wird BA' und bildet mit BA ebenfalls einen durch B gehenden Hauptkreis. Der Flächenraum dieser Spindel ABGA' ist indeß ebenfalls $=\pi-U$. Denn je näher C an A' kommt, desto mehr nähert sich AC dem Zustande einer Tangente, und wird wirklich eine Tangente, wenn C mit A' zusammentrifft. Der Winkel der Tangente mit der Sehne AB ist aber nach §. 75. Zus. 6. $=\frac{1}{2}\overline{U}$. Der Flächenraum der Spindel ist dem Doppelten dieses Winkels gleich, also $=\overline{U}=\pi-U$.

Zusatz 5. Ist die gemeinschaftliche Grundseite ein Durchmesser des Kreises, so ist $U=0$; daher $T=\pi$. Die Dreiecke also, welche zwischen gleichen Gegenkreisen liegen, und den Durchmesser eines dieser Kreise zur Grundseite haben, nehmen jedes den vierten Theil der Kugelfläche ein; und zwar bei jeder beliebigen Größe des Durchmessers. — Eine merkwürdige Eigenschaft!

Zusatz 6. Nimmt man von den Dreiecken, wie ABC, das gemeinschaftliche Segment ABD, dessen Flächenraum durch s bezeichnet sey, weg; so sind die übrigbleibenden Räume, wie CADB — ebenfalls sphärische Dreiecke, deren Basis ADB jedoch ein Nebenbogen ist — von gleichem Inhalte, nämlich $=\pi-(U+s)$.

Die Gleichheit solcher Afterdreiecke giebt ein Analogon zu dem planimetrischen Satze: „Dreiecke von gleicher Grund„linie und Höhe haben gleichen Flächenraum.“

Diese Analogie geht noch weiter; denn solche Afterdreiecke zwischen respektiven gleichen Gegenkreisen verhalten sich bei ungleichen Grundseiten, wie ihre Grundseiten — wie leicht zu erweisen ist.

§. 79.

Aufgabe. Es ist ein sphärisches Dreieck gegeben; man soll zwei Gegenkreise konstruiren, zwischen welchen das gegebene Dreieck liegt.

Auflösung 1. Das gegebene Dreieck sey ABC (Figur 61.) und AB sey die Grundseite. Man verlängere AC, BC über A, B bis zum zweiten Durchschnitte C′; beschreibe um das Nebendreieck ABC′ einen Kreis (§. 43.), dessen Mittelpunkt M sey. Um den Gegenpunkt des letztern, um M′, beschreibe man mit dem Radius M′C einen Kreis; so ist der Aufgabe genügt.

Beweis. Da der Bogen M′C=MC′ als Gegenbogen, und M′ der Gegenpunkt von M ist, so sind die Kreise Gegenkreise und das gegebene Dreieck liegt zwischen denselben.

Auflösung 2. Zu dem gegebenen Dreiecke ABC, dessen Basis AB sey, konstruire man das Nebendreieck ABC′ und dessen Gegendreieck A′B′C und beschreibe um beide Kreise.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß diese Kreise Gegenkreise sind. Der Kreis um ABC′ sey mit K, der um A′B′C mit K′ bezeichnet. Wäre K′ nicht der Gegenkreis von K, so sey es ein anderer K″. Dann müßte K″ auch durch die Punkte A′, B′, C gehen, wie K′. Aber zwei Kreise können nicht drei Punkte gemein haben. Folglich ist K′ der Gegenkreis von K.

Zusatz. Es giebt nur ein Paar Gegenkreise, zwischen denen ein sphärisches Dreieck liegen kann; vorausgesetzt, daß eine und dieselbe Seite immer als Grundseite genommen wird, deren Endpunkte beide in einem und demselben Kreise liegen müssen.

§. 80.

Lehrsatz. Alle sphärische Dreiecke über einerlei Grundseite und von gleichem Flächenraume liegen zwischen einerlei Gegenkreisen.

Beweis. Es sey (Figur 60.) ABC eins dieser Dreiecke auf der Grundseite AB, und CA'B', C'AB seyen die Gegenkreise, zwischen denen es liegt. Wäre ein Dreieck ABE möglich, welches eben so groß und auf derselben Grundseite liegend seine Spitze E nicht auf der Peripherie CA'B' hätte, so liege sie innerhalb des Gegenkreises. Die Seite BE schneidet dann in einem Punkte F dieselbe Peripherie. Man ziehe AF. So ist nach §. 78. das Dreieck AFB=ABC, und der Hypothesis wegen müßte auch AFB=AEB seyn; was unmöglich ist.

Auf ähnliche Weise folgt, daß E nicht außerhalb des Kreises CA'B' liegen kann. Mithin ist der Satz evident.

Anmerk. Aus §. 76. ließe sich der Beweis direkt führen.

Zusatz. Wegen §. 78. Zus. 1. gilt der Satz allgemeiner so: Alle sphärische Dreiecke auf gleichen Grundseiten und an gleichem Flächenraume liegen zwischen respektiven gleichen Gegenkreisen.

§. 81.

Lehrsatz. Unter den sphärischen Dreiecken, welche auf einer und derselben Sehne eines Nebenkreises stehend, ihre Spitzen in

der Peripherie deſſelben haben, hat das ſchiefere einen kleinern Umfang.

Beweis. Denn ſind (Figur 61.) AC'B, AC''B ſolche Dreiecke, ſo haben ihre Nebendreiecke ABc', ABc'' gleichen Flächenraum (§. 78.); alſo das ſchiefere ABc'' einen größeren Umfang. (§. 53.) Daher iſt $Ac''+Bc''>Ac'+Bc'$; mithin $AC''+BC''<AC'+BC'$.

Zuſatz. Das gleichſchenkliche Dreieck ABC hat alſo den größen Umfang.

§. 81.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Dreieck zu konſtruiren, welches mit einem gegebenen Dreiecke gleiche Grundſeite, gleichen Flächenraum und an der Grundſeite einen gegebenen Winkel hat.

Auflöſung. Das gegebene Dreieck ſey ABC (Figur 62.) und AB deſſen Grundſeite. Man konſtruire die Gegenkreiſe, zwiſchen denen es in Bezug auf dieſe Grundſeite liegt (§. 79.); lege an einem Endpunkte der Grundſeite, etwa A, den gegebenen Winkel an, deſſen Schenkel in D den Gegenkreis ſchneidet; ſo iſt ABD das verlangte Dreieck.

Beweis iſt aus dem Vorhergehenden hinreichend klar.

Zuſatz. Wird ſtatt des Winkels an der Grundſeite die Bedingung gegeben, daß das Dreieck gleichſchenklich ſey; ſo errichtet man auf der Mitte E der Grundſeite ein Perpendikel, deſſen Durchſchnitt F mit dem andern Gegenkreiſe die Spitze des geforderten Dreieckes giebt.

§. 83.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Dreieck in eine Spindel von gleichem Flächenraume zu verwandeln.

Auflösung. Zu dem gegebenen Dreiecke ABC (Figur 62.) konstruire man wie im vorigen §. seine Gegenkreise; lege an den einen in A eine Tangente, die im Gegenpunkte A′ den andern Kreis berührt, und verlängere AB bis A′, so ist AA′B die verlangte Spindel.

Beweis ergiebt sich aus §. 78. Zus. 4.

Anmerk. Diese Aufgabe ist ein spezieller Fall der vorhergehenden; der Fall nämlich, wenn der dort gegebene Winkel an der Grundseite ein Minimum ist. Vergl. §. 75. Zus. 6.

§. 84.

Aufgabe. Ein sphärisches Polygon in eine Spindel von gleichem Flächenraume zu verwandeln.

Auflösung. Das zu verwandelnde Polygon sey ABCD.... (Figur 63.) Um eine Ecke desselben, etwa B, verschwinden zu lassen, lege man zwei Gegenkreise, den einen durch die nächsten Ecken A, C; den andern durch B selbst (§. 79.); verlängere CD bis zum Durchschnitte C′ mit letzterem und ziehe AC′; so hat man ein Polygon AC′DE.... von gleichem Flächenraume mit einer Ecke weniger. Auf dieselbe Weise entfernt man eine Ecke nach der andern, bis das Polygon auf ein Dreieck reducirt ist, das nach vorigem §. in eine Spindel verwandelt wird.

Beweis. Das Polygon AC′DE.... ist dem ursprünglichen gleich, weil das Dreieck ABC = AC′C (§. 78.); also ABC + ACDE.... = AC′C + ACDE.... ist.

§. 85.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten ein sphärisches Dreieck von gegebenem Flächenraume zu konstruiren.

Auflösung. Der Flächenraum sey = T; die gegebe-

nen Seiten a, b. Man ſetze $T=\pi-U$; ſo iſt $U=\pi-T$ gegeben. Man nehme nun (Figur 64.) $AB=b$; lege an A und B zwei Winkel ABC, BAC, jeden $=\frac{1}{2}U$, deren Schenkel den Durchſchnitt C geben; nehme den Gegenpunkt C′ des letzteren und beſchreibe um C′ mit dem Radius AC einen Kreis. Endlich beſchreibe man um A mit dem Radius $=a$ einen Kreis, der in D den erſteren ſchneide; — ſo leiſtet das Dreieck ABD der Aufgabe Genüge.

Beweis. Beſchreibt man auch um C mit dem Radius AC einen Kreis, der durch B geht, weil $BC=AC$; ſo iſt derſelbe der Gegenkreis des um C′ beſchriebenen. Da nun das Dreieck ABD zwiſchen dieſen Gegenkreiſen liegt, ſo iſt aus §. 78. evident, daß ſein Flächenraum $=\pi-U=T$ ſey.

Zuſatz 1. Iſt der gegebene Flächenraum T gleich π; ſo iſt $U=0$; dann wird C der Mittelpunkt von AB. Iſt $T>\pi$; ſo iſt U negativ, und die Winkel an A und B müſſen über AB liegen, wenn nämlich das zu konſtruirende Dreieck über AB liegen ſoll. Der Grund ergiebt ſich aus §. 75. Zuſ. 2. und §. 77. Zuſ. 2.

Zuſatz 2. Da zwei Kreiſe ſich in zwei Punkten ſchneiden, ſo giebt es außer D noch einen Durchſchnitt, alſo im Allgemeinen zwei verſchiedene Dreiecke, welche der Aufgabe genügen. Doch fällt dies zweite Dreieck weg, wenn der zweite Durchſchnitt auf dem Gegenbogen des Nebenbogens AB liegt; wegen §. 78. Zuſ. 3.

Die Bedingung übrigens, unter welcher zwei verſchiedene Dreiecke aus a, b, T möglich ſind, d. h. unter welcher der zweite Durchſchnitt außerhalb des Nebenbogens A′B′ liegt, iſt, daß $a+b<\pi$ ſey. Der Beweis folgt aus §. 63. Zuſ. 2.

Anmerk. Legt man die Seite a an den Punkt B, ſo erhält man die ſymmetriſchen Dreiecke der vorigen.

Zusatz 3. Verlängert man den Bogen AC über A, so schneidet er den andern Gegenkreis in einem Punkte B', und geht durch den Mittelpunkt C' desselben. Da der Bogen AB' der kürzeste unter allen ist, welche von A nach der Peripherie des Gegenkreises gehen (§. 63. Zus. 2.); so darf die gegebene Seite a nicht kleiner, als AB' seyn, und es ist also AB' das Minimum für a.

Konstruirt man zu dem Dreiecke ABB', dem das Minimum AB' gehört, das Nebendreieck ABB'', so ist dessen Seite AB'' ein Durchmesser, also, nach §. 75. Zus. 2., Winkel ABB''=BAB''+BB''A; daher π—ABB''=π—BAB''—BB''A; d. i. ABB'=BAB'—BB'A, wenn BB'A für den gleichen BB''A gesetzt wird. Hieraus aber folgt BAB'=ABB'+BB'A. Daher ist auch die Seite BB' der Durchmesser des um ABB' beschriebenen Kreises. (§. 75. Zus. 2.; §. 76.)

Unter den sphärischen Dreiecken also, welche gleichen Flächenraum und gleiche Grundseiten haben, hat dasjenige, in welchem eine zweite Seite ein Minimum ist, den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises zur dritten Seite.

Von der Richtigkeit der Umkehrung:

Bei den sphärischen Dreiecken von gleichem Flächenraume und gleichen Grundseiten ist die zweite Seite desjenigen Dreieckes, dessen dritte Seite der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist, die kleinste unter den übrigen an die respektive Grundseite stoßenden Seiten —

wird man sich, obige Schlüsse rückwärts wiederholend, leicht überzeugen.

Anmerk. Man wird die Analogie mit dem ebenen Dreiecke hier, so wie in dem Folgenden, nicht übersehen.

§. 86.

Lehrsatz. Unter den sphärischen Dreiecken, welche aus zwei gegebenen und einer drit-

ten willkührlichen Seite gebildet werden können, hat dasjenige, dessen dritte Seite der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist, den größten Flächenraum.

Beweis. In dem Dreiecke (Figur 65.) sey die Seite BB′ der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises. In dem Nebendreiecke ABB″ desselben ist also nach §. 85. Zus. 3. auch AB″ der Durchmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises. Konstruirt man diesen und seinen Gegenkreis, der durch B′, den Gegenpunkt von B″ gehen muß; so ist AB′ der kürzeste Bogen von A nach der Peripherie desselben, weil er verlängert durch den Mittelpunkt C′, den Gegenpunkt von C, des ersteren Kreises, geht. Jedes andere Dreieck nun, welches aus den Seiten AB, AB′ gebildet, über der Grundseite AB möglich ist, muß seine Spitze in der Peripherie des Nebenkreises, der um A mit dem Radius AB′ beschrieben wird, haben. Ein solches sey AGB. Die Seite AG verlängere man, bis zur Peripherie des Gegenkreises um C′, den sie in D treffe, und ziehe BD; so ist das Dreieck ABB′=ABD; aber ABD>ABG; also ABB′>ABG. Da für jede andere Lage von G dasselbe gilt, so ist der Satz evident.

Zusatz. Soll die Hypothesis des Lehrsatzes möglich seyn, so muß die Summe der gegebenen Seiten kleiner als ein Halbkreis seyn. Denn bezeichnet man sie mit a, b; die dritte beliebige Seite mit c; die Winkel des Dreieckes mit A, B, C; so muß, wenn c der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist, $C=A+B$; also, weil $C<\pi$; auch $A+B<\pi$; mithin $a+b<\pi$ seyn.

Daß ein größtes Dreieck immer möglich ist, wenn die gegebenen Seiten a, b dieser Bedingung genügen, zeigt der folgende §.

§. 87.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten, deren

Summe kleiner als ein Halbkreis ist, ein größtes Dreieck zu konstruiren.

Auflösung. Die gegebenen Seiten seyen a, b, deren Summe $a+b<\pi$ ist. Man nehme (Figur 66.) $AB=b$. Da $a+b<\pi$ ist, so ist $b<\pi-a$; oder $b<\bar{a}$; daher auch $\frac{1}{2}b<\frac{1}{2}\bar{a}$; beschreibt man also um A und um B Kreise, jeden mit dem Radius $\frac{1}{2}\bar{a}$, so geben diese einen Durchschnitt M, außerhalb AB. Zieht man den Radius MA und verlängert ihn über A bis B', so daß $AB'=a$ wird, verlängert ihn dann über B' bis M', den Gegenpunkt von M; so ist $M'B'=MA$. Denn $MAB'M'$ ist $=\pi$; daher $M'B'=\pi-a-\frac{1}{2}\bar{a}=\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{a}=\frac{1}{2}\bar{a}=MA$. Der um M' mit dem Radius M'B' beschriebene Kreis ist also der Gegenkreis des um M mit dem Radius MA beschriebenen. Das Dreieck ABB', welches die gegebenen Seiten hat, liegt also zwischen diesen Gegenkreisen, und hat, weil AB' der kürzeste Bogen von A nach der Peripherie des andern Gegenkreises ist, einen größern Flächenraum, als jedes andere aus den Seiten a, b, gebildete. (§. 86.)

Zusatz 1. Ist $a+b=\pi$; so ist $b=\bar{a}$. Dann fällt der Durchschnitt M (als Berührungspunkt) mit dem Mittelpunkte D des Bogens AB zusammen; AB fällt mit AB' in einen Halbkreis zusammen; B und B' sind Gegenpunkte, daher auch BB' ein Halbkreis; das ganze Dreieck wird also eine Spindel. Das Maximum ist also in diesem Falle eine Spindel, kein Dreieck.

Ist aber $a+b>\pi$; so ist $b>\bar{a}$; $\frac{1}{2}b>\frac{1}{2}\bar{a}$; daher ist kein Durchschnitt M möglich.

Zusatz 2. Unter den sphärischen Dreiecken, welche aus zwei gegebenen Seiten, deren Summe kleiner als ein Halb-

kreis ist, gebildet werden können, hat das größte die Eigenschaft, daß die dritte nicht gegebene Seite desselben der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist.

§. 88.

Lehrsatz: Aus zwei gegebenen Seiten, deren Summe größer als ein Halbkreis ist, ist kein größtes Dreieck möglich.

Beweis. Die gegebenen Seiten seyen a, b und $a+b>\pi$; dann ist $\bar{a}+\bar{b}<\pi$, und es läßt sich aus $\bar{a}$ und $\bar{b}$ ein größtes Dreieck konstruiren. Dies sey (Figur 67.) das Dreieck ABC, dessen Seite AB der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist; von den andern Seiten desselben sey $AC=\bar{b}$; $CB=\bar{a}$. Man denke sich den Schenkel CB beweglich um den festen Punkt C; so wird der Punkt B den Kreis B′B″BB‴ beschreiben, der in B′ die Seite AC, in B‴ deren Verlängerung und in B den um ABC beschriebenen Kreis schneidet. Versetzt man nun CB auf CB′, so ist der Winkel an C (ACB′) Null; bewegt sich der Bogen CB aus dieser Lage nach der Richtung B′B‴, so wächst der Winkel an C und mit ihm der Flächenraum des Dreieckes; in B erreicht letzterer sein Maximum, nimmt also jenseit B wieder ab, während jedoch der Winkel an C, der schon als ACB ein stumpfer war, fortwächst. Der Winkel an A, von Anfang an wachsend, erreicht sein Maximum, wenn B in B″, dem Berührungspunkte der von A an den Kreis B′BB‴ gezogenen Tangente, ist und nimmt weiterhin fortwährend ab. Kommt der Punkt B nach B‴, so ist der Winkel an $C=\pi$; der Winkel an A verschwindet, das Dreieck mit ihm.

Nimmt man nun den Gegenpunkt von C, der in C′ sey; so schneiden die über A, B verlängerten Seiten AC, BC sich in C′ und in dem Dreiecke AC′B ist $AC'=b$; $BC'=a$. Die Spindel CABC′ wächst bei der oben be-

trachteten Bewegung des Schenkels CB (oder des Halbkreises CBC') in dem Maaße, wie der Winkel an C; nimmt also, wenn $C=\pi$ ist, die halbe Kugelfläche ein. Das aus den Seiten a, b gebildete Dreieck ABC', als die Differenz zwischen der Spindel und dem Dreiecke ABC, wächst offenbar vom Anfange der Bewegung an und um so mehr, sobald das Dreieck ABC nach erreichtem Maximum wieder abnimmt. Es erreicht also kein Maximum des Flächenraumes, sondern geht, sobald der Winkel an $C'=\pi$ wird, in einen Hauptkreis über, der die halbe Kugelfläche einnimmt.

§. 89.

Lehrsatz. Unter den sphärischen Polygonen von n Seiten, welche aus (n—1) gegebenen und einer nten beliebig zu wählenden zusammengesetzt seyn können, hat das größte, wenn ein solches möglich ist, die Eigenschaft, daß seine Ecken in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Durchmesser die nte, nicht gegebene, Seite ist.

Beweis. Es sey (Figur 68.) ABCDEF das größte Polygon unter denen, welche mit ihm außer der Seite AF die übrigen gemein haben. Wäre unter den Ecken desselben eine, die nicht in der Peripherie des über AF als Durchmesser beschriebenen Kreises läge, etwa D; so ziehe man AD und DF. Das Dreieck ADF ist dann nicht das größte der Seiten AD, FD. Giebt es aber ein größeres Dreieck mit den Seiten AD, DF, so giebt es auch, wenn man mit dem größten die Polygonabschnitte ABCD und DEF verbindet, ein größeres Polygon mit den gegebenen Seiten, als ABCDEF ist, welches doch das größte seyn sollte. Da dies der Voraussetzung widerspricht, so ist die Annahme, es liege D außerhalb der Peripherie, falsch. Also muß jede

Ecke des größten Polygones in der genannten Peripherie liegen.

Zusatz. Auch hier findet sich die Bedingung der Möglichkeit eines Größten, daß die Summe der gegebenen Seiten kleiner, als ein halber Hauptkreis, seyn muß. Denn jede der Sehnen AB, BC,.... ist kleiner, als der zugehörige Nebenbogen des umgeschriebenen Kreises; daher ihre Summe kleiner, als der halbe Nebenkreis, um so mehr also kleiner, als ein halber Hauptkreis.

§. 90.

Lehrsatz. Wenn aus (n—1) gegebenen Seiten zwei sphärische Polygone, jedes von n Seiten, so zusammengesetzt sind, daß die Ecken eines jeden in einem Halbkreise liegen, dessen Durchmesser die nicht bestimmte nte Seite des Polygones ist; so haben die beiden Polygone gleichen Flächenraum.

Beweis. In den Polygonen (Figur 69.) ABCDE und A′B′C′D′E′ sey AB=A′B′; BC=B′C′; CD=C′D′; und DE=D′E′; ferner seyen AE, A′E′ die Durchmesser der Kreise, in deren Peripherien die Ecken beider Polygone liegen. Wir behaupten nun, die Durchmesser AE, A′E′ der Kreise, also die Kreise selbst, sind einander gleich. Denn wäre etwa AE<A′E′, so halbire man AE, A′E′ in M, M′; so wie AB, A′B′ in N, N′; und ziehe MB, M′B′; MN, M′N′, welche letztere beide auf AB, A′B′ senkrecht sind. (§. 40. Zus. 1.) Da AE<A′E′, so ist auch AM<A′M′; in den rechtwinklichen Dreiecken ANM, A′N′M′ ist also AN=A′N′, aber AM<A′M′; daher ist Winkel AMN>A′M′N′ (§. 38. Zus. 1. 2.); und auch NMB>N′M′B (§. 40. Zus. 1.); daher ist AMB>A′M′B′. Eben so folgt BMC>B′M′C′; CMD>C′M′D′; DME>D′M′E′. Es müßte also AMB+BMC+CMD+DME>A′M′B′+

B'M'C'+C'M'D'+D'M'E' seyn, was nicht seyn kann. Also kann AE nicht <A'E' seyn. Auf gleiche Weise folgt, daß AE nicht >A'E' seyn kann; mithin muß AE=A'E' seyn. Ist dies aber, so ist AM=A'M'; BM=B'M' u. s. w., also die Dreiecke AMB, BMC,.... den Dreiecken A'M'B', B'M'C',... gleich; mithin auch ihre Summen, die Polygone von gleichem Flächenraume.

Zusatz. Folgen die gegebenen Seiten in dem einen Polygone in anderer Ordnung auf einander, als in dem andern, so stört dies die gemachten Schlüsse nicht. So viele Versetzungen der gegebenen Seiten möglich, so viele verschiedene Polygone erhält man, die indeß alle gleichen Flächenraum haben.

Anmerk. Die Versetzungszahl ist 1. 2. 3.....(n—1), wenn die gegebenen Seiten alle von einander verschieden sind; sonst ist sie bekanntlich $\frac{1.\ 2.\ 3.....(n-1)}{1.\ 2....\alpha.\ 1.\ 2.\ 3....\beta\ \text{ꝛc.}}$; wenn eine αmal, eine andere βmal ꝛc. vorkommt.

§. 91.

Lehrsatz. Ist aus (n—1) gegebenen Seiten und einer willkührlichen Seite ein sphärisches Polygon so zusammengesetzt, daß die Spitzen desselben in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Durchmesser jene willkührliche Seite ist, so hat das Polygon den größten Flächenraum, welchen die gegebenen Seiten zulassen.

Beweis. Das hier bezeichnete Polygon sey P. Nach §. 89. hat das aus den gegebenen (n—1) Seiten aus einer nten willkührlichen zusammengesetzte größte Polygon P' seine Ecken in der Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser jene nte Seite ist. Nach §. 90. haben alle Polygone aus den gegebenen (n—1) Seiten und der beliebigen nten

gleichen Flächenraum. Zu diesen gehört nun sowohl P', als auch P. Daher ist P = P'. Also ist das im Lehrsatze bezeichnete Polygon ein Maximum.

§. 92.

Lehrsatz. Wenn aus n gegebenen Seiten zwei nseitige sphärische Polygone so zusammengesetzt sind, daß jedes seine Ecken in einer Kreisperipherie hat; so sind die Polygone von gleichem Flächenraume.

Beweis. Die Seiten der Polygone (Fig. 70.) ABCD...., A'B'C'D'....., seyen resp. gleich; nämlich AB = A'B'; BC = B'C' u. s. w.; und M, M' seyen die Mittelpunkte der Kreise, in deren Peripherien die Ecken der Polygone liegen. Wären nun die Radien MA, M'A' einander nicht gleich; so sey MA < M'A'. Daraus folgt, wie in §. 90, daß der Winkel AMB > A'M'B'; BMC > B'M'C' u. s. w.; endlich, daß die Winkel um den Punkt M zusammen größer als die um M' seyn müßten; daher können die Radien nicht ungleich seyn. Sind sie nun gleich, so sind die gleichschenklichen Dreiecke AMB, BMC,.... kongruent mit A'M'B', B'M'C'....; mithin beide Polygone von gleichem Flächenraume.

Zusatz. Auch hier ist die Ordnung der Seiten des einen Polygones unabhängig von der in dem andern.

§. 93.

Lehrsatz. Unter den sphärischen Polygonen, welche aus n gegebenen Seiten gebildet werden können, hat dasjenige, dessen Spitzen in einer Kreisperipherie liegen, den größten Flächenraum, welchen die gegebenen Seiten zulassen.

Beweis. Es seyen (Figur 71.) ABCDEFG und

A'B'C'D'E'F'G' zwei sphärische Polygone, jedes aus den gegebenen Seiten zusammengesetzt, von denen das erstere seine Spitzen in der Peripherie eines Kreises hat; das andere nicht. Da alle Polygone, welche, aus denselben Seiten bestehend, ihre Spitzen in einer Kreisperipherie haben, gleich groß sind (§. 92.); so sey ABC....G dasjenige unter denselben, dessen Seiten in derselben Ordnung auf einander folgen, wie in dem andern A'B'C'....G'. Man ziehe in ABC...G den Durchmesser AI und ziehe DI, EI. An dem zweiten Polygone beschreibe man das Dreieck D'I'E'=DIE; nämlich D'I'=DI; D'E'=DE; und ziehe A'I'. Von den beiden Abschnitten A'B'C'D'I' und A'G'F'E'I' kann der Annahme wegen höchstens einer alle seine Spitzen in einem Halbkreise haben; dieser sey A'B'C'D'I'. Dann ist A'B'C'D'I'=ABCDI (§. 90.); aber A'G'F'E'I'<AGFEI (§. 91. 90.); mithin A'B'C'D'I'E'F'G'<A...I....G. Nimmt man von diesen DIE=D'I'E' weg; so folgt ABCDEFG>A'B'C'D'E'F'G. — Hat aber keiner von den beiden Abschnitten des zweiten Polygones alle Spitzen in einem Halbkreise, so ist jeder kleiner, als der entsprechende Abschnitt des ersten Polygones. Um so mehr ist dann dieses größer als jenes. Hieraus folgt die Richtigkeit des Satzes.

Zusatz. Unter den sphärischen Polygonen, welche aus n gegebenen Seiten gebildet werden können, hat das größte die Eigenschaft, daß seine Spitzen alle in der Peripherie eines Kreises liegen. Denn wäre dies nicht, so würde das aus denselben Seiten gebildete, dessen Spitzen in einer Kreisperipherie liegen, größer als das größte seyn.

Von den sphärischen Parallelogrammen.

§. 94.

Erklärung. 1) Das sphärische Parallelogramm ist dasjenige sphärische Viereck, welches zwischen zwei Paar Gegenkreisen liegt — oder: dessen Ecken Durch-

schnittspunkte zweier Gegenkreise mit zwei andern Gegenkreisen sind, ohne daß das Viereck in einem dieser Kreise liegt. 2) Das sphärische Trapez aber liegt nur zwischen zwei Gegenkreisen. Von den beiden Seiten, welche Sehnen dieser Kreise sind, wird eine immer als Grundseite des Trapezes genommen werden. 3) Jedes andere sphärische Viereck ist sphärisches Trapezoid.

Zusatz. Bei dem sphärischen Parallelogramme sind jede zwei einander gegenüber liegende Seiten Sehnen in Gegenkreisen; bei dem Trapeze nur ein Paar solcher Seiten.

§. 95.

Lehrsatz. In jedem sphärischen Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Beweis. Um die Gegenpunkte (Fig. 72.) A, A′ seyen die Gegenkreise CMND, C′M′N′D′; und um zwei andere Gegenpunkte B, B′ die Gegenkreise EMN′F, E′M′NF′ beschrieben; welche mit den ersteren beiden sich in den Punkten M, N, M′, N′, schneiden, die durch Hauptbogen verbunden, das sphärische Parallelogramm MN M′N′ geben. Daß diesem die im Lehrsatze behauptete Eigenschaft zukommt, läßt sich so zeigen.

Von dem Mittelpunkte jedes Kreises ziehe man nach den Durchschnittspunkten desselben Radien: AM, AN, BM, BN′, u. s. w. Da ist nun

1) das Dreieck BMA = B′M′A′; weil BM = B′M′; AM = A′M′, als Radien; und AB = A′B′ als Gegenbogen.

Daher ist Winkel BAM = B′A′M′; ABM = A′B′M′.

2) Dreieck BN′A′ = B′NA, aus den vorhin genannten Gründen.

Daher ist Winkel A′BN′ = AB′N; und BA′N′ = B′AN.

3) Aus BAM = B′A′M′

und B′AN = BA′N′

folgt BAM + B′AN = B′A′M′ + BA′N′;

und hieraus: MAN = M'A'N', als Supplemente der Summen der vorigen.

Aus MAN = M'A'N' folgt: MN = M'N' (§. 60. Zuſ. 4.) Auf dieſelbe Weiſe findet ſich MN' = M'N.

Zuſatz 1. Nimmt man ſtatt der Hauptbogen MN, MN', M'N', M'N, die gleichbezeichneten Nebenbogen der Gegenkreiſe als Seiten des Viereckes, ſo hat man ein ſphäriſches Parallelogramm, in welchem jede Seite der gegenüberliegenden parallel iſt.

Zuſatz 2. Durch jede Diagonale wird das ſphäriſche Parallelogramm in zwei gleiche Dreiecke getheilt. Denn zieht man in dem Parallelogramm MNM'N' (Fig. 73.) die Diagonale MM'; ſo iſt das Dreieck MN'M' = MNM', weil MN = M'N'; MN' = M'N und MM' = MM' iſt.

Daher ſind die Diagonalwinkel eines ſphäriſchen Parallelogrammes einander gleich; nämlich MN'M' = MNM'; und v + u = v' + u'; weil v = v'; u = u'.

Zuſatz 3. Die beiden Diagonalen des ſphäriſchen Parallelogrammes halbiren ſich gegenſeitig.

Denn wie u = u'; iſt auch y = y'; und da MN = M'N'; ſo iſt das Dreieck MNO = M'N'O; daher MO = OM'; NO = ON'.

Zuſatz 4. Sind alle Winkel des ſphäriſchen Parallelogrammes einander gleich; ſo ſind auch die Diagonalen gleich.

Denn iſt Winkel M = N; ſo iſt das Dreieck N'MN = MNM'; daher MM' = NN'.

Anmerk. Ein ſolches Parallelogramm entſpricht dem ebenen Rechtecke.

Zuſatz 5. Sind die Winkel aber nicht alle gleich, ſo ſteht dem größern eine größere Diagonale gegenüber.

Denn iſt M > N; ſo iſt NN' = MM' wegen §. 31.

Zuſatz 6. Ein ungleichwinkliches Parallelogramm läßt ſich nicht in einen Kreis einſchreiben.

Denn wäre es möglich, ſo müßte O entweder der Mittelpunkt des umgeſchriebenen Kreiſes ſeyn, oder nicht.

Wäre O der Mittelpunkt, so müßten die Diagonalen MM′, NN′ als Durchmesser gleich seyn; was nicht möglich ist (Zus. 5.). Wäre O ein anderer Punkt des umgeschriebenen Kreises, so müßten sich die Sehnen MM′, NN′ halbiren (Zus. 3.); was auch nicht seyn kann (§. 64. Zus. 4.).

Anmerk. Daher liegt das Sehnenviereck eines solchen sphärischen Parallelogrammes nicht in einer Ebne.

Zusatz 7. Um ein gleichwinkliches sphärisches Parallelogramm läßt sich ein Kreis beschreiben. Denn in einem solchen sind die Diagonalen gleich, also ihr Durchschnitt O von allen Ecken gleichweit entfernt. Der um O mit dem Radius OM beschriebene Kreis geht also durch alle Ecken des Parallelogrammes.

§. 96.

Lehrsatz. Wenn in einem sphärischen Vierecke die einander gegenüber liegenden Seiten paarweise gleich sind, so ist das Viereck ein sphärisches Parallelogramm.

Beweis. In dem Vierecke (Fig. 73.) MNM′N′ sey MN = M′N′; MN′ = M′N. Man ziehe die Diagonalen MM′, NN′; so ist das Dreieck MN′M′ = MNM′, weil die Seiten beiderseits gleich sind; daher ist der Flächenraum des Dreiecks MN′M′ die Hälfte des ganzen Vierecks. Eben so folgt, daß das Dreieck NN′M′ die Hälfte des Viereckes ist; und hieraus folgt, daß die Dreiecke MN′M′, NN′M′, welche auf einerlei Grundseite N′M′ liegen, gleichen Flächeninhalt haben. Solche Dreiecke liegen aber zwischen einerlei Gegenkreisen (§. 80.); daher liegt das Viereck MNM′N′ zwischen zwei Gegenkreisen, deren einer durch M, N; der andere durch M′, N′ geht. Eben so folgt aus der Gleichheit der Dreiecke MN′N, MN′M′, daß das Viereck zwischen zwei andern Gegenkreisen liegt, von denen der eine durch M, N′; der andere durch M′, N geht. Also ist das Viereck ein Parallelogramm.

§. 97.

Lehrsatz. Ein sphärisches Viereck ist auch ein Parallelogramm, wenn zwei einander gegenüberliegende Seiten desselben gleich und Sehnen zweier Gegenkreise sind.

Beweis. In dem sphärischen Vierecke (Figur 73.) MNM'N' sey MN=M'N'; und beide Seiten Sehnen zweier Gegenkreise, von denen also der eine durch M, N; der andere durch M', N' geht.

Zieht man die Diagonalen MM', NN'; so haben die Dreiecke MNN' und M'N'M gleichen Flächenraum, weil sie auf gleichen Grundseiten, MN, M'N' und zwischen einerlei Gegenkreisen liegen (§. 78. Zus. 1.). Betrachtet man nun MN' als die gemeinschaftliche Grundseite derselben Dreiecke, so liegen sie des gleichen Flächenraumes wegen zwischen zwei andern Gegenkreisen, von denen der eine durch M, N', der andere durch M', N geht. Mithin ist MNM'N' ein sphärisches Parallelogramm.

§. 98.

Lehrsatz. Das Polarviereck eines sphärischen Parallelogrammes ist selbst ein sphärisches Parallelogramm.

Beweis. Es sey (Fig. 74.) MNM'N' ein sphärisches Parallelogramm und a, b, c, d seyen resp. die Pole der Seiten MN, M'N', MN', M'N, welche das Polarviereck abcd bilden. Bezeichnet man die Winkel des Parallelogrammes MNM'N' kurz durch die Buchstaben ihrer Scheitel, so ist da=π—N; bc=π—N'; also, wegen N=N' (§. 95. Zus. 2.), auch da=bc; eben so folgt aus M=M', daß ac=db; hieraus aber nach §. 96, daß abcd ein sphärisches Parallelogramm ist.

Zusatz 1. Sind in einem sphärischen Vierecke die Dia-

gonalwinkel paarweise gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm. Denn ist N=N'; M=M'; so ist im Polarvierecke ad=bc; ac=db; dasselbe also ein Parallelogramm; mithin auch sein Polarviereck MNM'N' ein Parallelogramm.

Zusatz 2. In ein ungleichseitiges sphärisches Parallelogramm, d. h. in welchem nicht alle Seiten, sondern nur je zwei gleich sind, läßt sich kein Kreis beschreiben. Denn wäre es möglich, so würde nach §. 71. Zus. das Polarparallelogramm — ein ungleichwinkliches — ein in den Polarkreis eingeschriebenes seyn; was nicht möglich ist (§. 95. Zus. 6.).

§. 99.

Lehrsatz. Sphärische Parallelogramme auf gleichen Grundseiten und zwischen resp. gleichen Gegenkreisen haben gleichen Flächenraum.

Beweis. Ist in den sphärischen Parallelogrammen (Fig. 75.) MNM'N' und mnm'n' die Grundseite M'N'=m'n', also auch MN=mn, so ist das Dreieck N'M'M=n'm'm; und MNM'=mnm', weil sie auf gleichen Grundseiten und zwischen gleichen Gegenkreisen liegen (§. 78. Zus. 1.); daher die Parallelogramme einander gleich.

Zusatz. Umgekehrt: haben sphärische Parallelogramme gleiche Grundseiten und gleichen Flächeninhalt, so liegen sie zwischen gleichen Gegenkreisen. Denn dann ist das Dreieck MN'M'=mn'm', als Hälften gleicher Ganzen; beide liegen also zwischen gleichen Gegenkreisen (§. 80. Zus.). Die Gegenkreise nun, zwischen denen das Dreieck MN'M' liegt — N'M' als Grundseite genommen —, müssen dieselben seyn, zwischen denen das ganze Parallelogramm liegt (§. 79. Zus.); eben so bei dem andern Parallelogramme mnm'n'. Mithin liegen die Parallelogramme zwischen gleichen Gegenkreisen.

§. 100.

Aufgabe. Ein sphärisches Parallelogramm zu konstruiren, von welchem eine Seite und ein Winkel gegeben ist und das einem gegebenen Parallelogramme an Flächenraume gleich sey.

Auflösung. Das gegebene Parallelogramm sey MNM'N' (Fig. 76.); die gegebene Seite sey a, der gegebene Winkel w. Da jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, so braucht man nur ein solches Dreieck zu konstruiren. Man ziehe also die Diagonale MM'; beschreibe die Gegenkreise des Dreieckes MN'M' — etwa N'M' als Grundseite genommen — und ziehe nach dem Mittelpunkte C des einen den Radius N'C; so ist der Winkel M'N'C=½U (§. 75. Zus. 2. ꝛc.). Man nehme nun n'm'=a, mache die Winkel m'n'c, n'm'c jeden =½U; so ergiebt sich der Durchschnitt c, um dessen Gegenpunkt c' mit dem Radius n'c man einen Kreis beschreibe. An n' lege man einen Winkel mn'm'=w, dessen Schenkel mn', in m den Kreis schneide.

Zieht man noch mm'; so ist das Dreieck n'm'm= N'M'M. Das verlangte Parallelogramm ergiebt sich nun, wenn man von m aus einen Bogen beschreibt, dessen Radius =n'm' und der in n den Kreis schneidet; dann ist mnm'n' das gesuchte Parallelogramm.

Beweis. Daß das Dreieck mn'm'=MN'M' ist, wird so wie in §. 85. bewiesen. Das Uebrige folgt aus §. 97. und §. 95. Zus. 2.

Zusatz. Ist statt des gegebenen Parallelogrammes der Flächenraum des gesuchten blos in Zahlen (nach Graden oder in Bezug auf das Quadrat des Kugelradius als Einheit) bestimmt; so verfährt man wie §. 85. Die gegebene Zahl sey P; das zu konstruirende Dreieck mn'm' ist dann =½P; woraus U=π—½P folgt.

§. 101.

Aufgabe. Ein sphärisches Parallelogramm zu konstruiren, von welchem zwei an einander liegende Seiten und der Flächenraum gegeben sind.

Auflösung. Die gegebenen Seiten seyen a, b; der Flächenraum P. Man verzeichne nach §. 85. ein Dreieck mit den Seiten a, b und dem Flächenraum ½P und verfahre dann wie im vorigen §.

§. 102.

Aufgabe. Aus zwei gegebenen Seiten das größte sphärische Parallelogramm zu verzeichnen, welches die gegebenen Seiten zulassen.

Auflösung ergiebt sich aus §. 87.

Zusatz. Das größte Parallelogramm liegt in einem Kreise und ist ein gleichwinkliches.

§. 103.

Lehrsatz. Wenn in einem sphärischen Trapeze zwei Diagonalen gezogen werden, so sind von den dadurch erzeugten vier Dreiecken diejenigen zwei einander gegenüberliegenden von gleichem Flächenraume, deren keines die Grundseite des Trapezes als Seiten hat.

Beweis. Das sphärische Trapez ABCD (Fig. 77.) habe CD als Grundseite. Die Gegenkreise, zwischen denen es liegt, gehen also der eine durch C, D; der andere durch A, B. Zieht man die Diagonalen AD, CB, welche in E sich schneiden, so ist der Flächenraum ACD = BCD; daher, nach

Wegnahme des gemeinschaftlichen ECD, das Dreieck AEC =BED.

§. 104.

Lehrsatz. Zwei sphärische Trapeze haben gleichen Flächenraum, wenn sie zwischen resp. gleichen Gegenkreisen und auf gleichen Grundseiten liegen, und wenn die den Grundseiten gegenüberliegenden den Seiten gleich sind.

Beweis. Liegen die Trapeze ABCD (Fig. 77.) und A′B′C′D′ (Fig. 78.) zwischen gleichen Gegenkreisen; sind ihre Seiten CD, C′D′ einander gleich und auch AB=A′B′; so sind die durch die Diagonalen AD, A′D′ gebildeten Dreiecke paarweise dem Flächeninhalte nach gleich; nämlich ACD=A′C′D′; ABD=A′B′D′ (§. 78. Zus. 1.); daher die Trapeze von gleichen Flächeninhalte.

Zusatz. Wenn zwei dem Flächenraume nach gleiche sphärische Trapeze auf gleichen Grundseiten liegen und auch die den Grundseiten gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind; so liegen die Trapeze zwischen gleichen Gegenkreisen.

Konstruktion regelmäßiger Polygone.

§. 105.

Aufgabe. Ein gleichschenkliches Dreieck zu konstruiren, dessen Grundseite nebst dem gegenüberliegenden Winkel gegeben ist.

Auflösung. Die Grundseite sey a, der ihr gegenüberliegende Winkel w. Man konstruire eine Spindel (Fig. 79.) CFF′C, deren Winkel FCF′=a ist und halbire sie durch einen Hauptkreis CGC′, dessen Pol D sey. Um D beschreibe

man mit dem Radius $= \frac{1}{2}(\pi - a)$ einen Kreis, der in B den Bogen CF schneide; ziehe DB, der verlängert auf CF den Durchschnitt A giebt; — so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Da D der Pol von CGC' ist, so ist $DE = \frac{\pi}{2}$; und steht auf CE senkrecht. Die rechtwinklichen Dreiecke CEB, CEA sind einander gleich (§. 22.); daher $AC = BC$, also CAB ein gleichschenkliches Dreieck; ferner ist $AE = EB$ und $EB = ED - BD = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}(\pi - a) = \frac{1}{2}a$; mithin $AB = a$.

Anmerk. Die Aufgabe ist zweideutig, denn das gleichseitige Dreieck ABC erfüllt dieselben Bedingungen. Sie wird aber bestimmt, wenn bekannt ist, ob die Schenkel des Dreiecks kleiner oder größer als ein Quadrant seyn sollen.

Zusatz. Der gegebene Winkel muß größer als die gegebene Grundseite seyn. Denn beschreibt man um C als Pol den Hauptkreis DGD', der in F, F' die Schenkel der Spindel schneidet; so ist DGD' senkrecht auf beiden Schenkeln und DF' wie $DA > \frac{\pi}{2}$, daher $DF' > DA$; und $DF' < DB$; daher $FF' > AB$. Der Winkel FCF' aber ist $=$ FF'; also muß $w > a$ seyn; wenn die Schenkel des gesuchten Dreieckes nicht etwa Quadranten sind.

§. 106.

Aufgabe. Ein gleichschenkliches sphärisches Dreieck zu konstruiren, dessen Flächenraum und der Winkel an der Spitze gegeben sind.

Auflösung. Der gegebene Flächenraum sey $= T$; der Winkel an der Spitze $= w$. Bezeichnet man die Winkel an der Grundseite des gesuchten Dreieckes mit A, B, die einander gleich sind, so ist $T = A + B + w - \pi = 2A + w - \pi$; daher $A = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}w$. Da also alle Winkel des Drei-

eckes hiedurch gegeben sind, so läßt sich dasselbe nach §. 41. I. konstruiren.

Eine andere Auflösung, die auch an dem angeführten Orte mit einigen Modificationen sich anwenden läßt, mag zum Ueberflusse hier noch folgen.

Man nehme drei auf einander senkrechte Hauptkreise (Fig. 80.) PQP'Q', QRQ', PRP'; und beschreibe um die Gegenpunkte Q, Q' mit dem Radius $=\frac{1}{2}w$ Gegenkreise, die in q, q' sich mit QRQ' schneiden. Um q, q' als Pole beschreibe man die Hauptkreise PMP', PNP'; um P beschreibe man mit dem Radius $=\frac{1}{2}(\pi+T-w)=A$ einen Kreis, der in L den um Q beschriebenen schneide; führe von Q durch L einen Hauptkreis QLQ', der in A und B die Spindel PMNP schneide; — so ist PAB das verlangte Dreieck.

Beweis. Nimmt man $Rp=CP$, so ist $pC=RP=\frac{\pi}{2}$; also, da PRP' und QCQ' auf einander senkrecht sind (§. 11. Zus. 5.), ist p der Pol von QCQ' (§. 8, Zus. 4. 2.). Zieht man den Bogen pq, so ist das rechtwinkliche Dreieck $pRq=PCL$, weil $Rp=PC$ (per Constr.) und $Rq=CL$ als Komplemente von Qq, QL; daraus folgt: $pq=PL=\frac{1}{2}(\pi+T-w)=A$. Da p, q die Pole der Kreise QCQ, PMP' sind, so ist die Polentfernung pq dem Supplemente des Winkels QAP', also $pq=PAB=A=\frac{1}{2}(\pi+T-w)$. Eben so führt die Gleichheit der Dreiecke pRq' und PCL auf $PBA=\frac{1}{2}(\pi+T-w)$.

Endlich, da $QR=qM=\frac{\pi}{2}$, also $RN=qQ=\frac{1}{2}w$, mithin $MN=w$, und $APB=MN$ (§. 11. Zus. 6.) ist; — so ist der Winkel $APB=w$. Das Dreieck PAB ist also ein gleichschenkliches, dessen Winkel an der Spitze $P=w$ und dessen Flächenraum $P+A+B-\pi=w+\frac{1}{2}(\pi+T-w)+\frac{1}{2}(\pi+T-w)-\pi=T$ ist.

Zusatz. Der Bogen mn, der von beiden Nebenkreisen eingeschlossene Theil, des durch ihre Mittelpunkte P, Q ge-

henden Hauptkreises, ist dem Flächenraume $\frac{1}{2}T$ gleich. Denn es ist $Pn = \frac{1}{2}(\pi + T - w)$; und $Qm = \frac{1}{2}w$, daher $Pn + Qm = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}T$; d. i. $\frac{1}{2}\pi + mn = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}T$; daher $mn = \frac{1}{2}T$.

§. 107.

Aufgabe. Ein regelmäßiges sphärisches Polygon zu konstruiren

1) wenn dessen Seitenzahl und Umfang;
2) wenn die Seitenzahl und der Flächenraum desselben gegeben ist.

Auflösung. Da jedes regelmäßige Polygon von dem Mittelpunkte des ein- oder umgeschriebenen Kreises aus in kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegt werden kann, deren gemeinschaftliche Spitze in jenem Mittelpunkte liegt und deren Grundseiten die Seiten des Polygones sind; so braucht man nur ein solches Dreieck zu konstruiren, um das gesuchte Polygon zu finden.

1) Für die erste Aufgabe sey nun n die Zahl der Seiten des Polygones und der Umfang $= V$.

Das Polygon besteht also aus n gleichschenklichen Dreiecken, jedes mit der Grundseite $= \frac{V}{n}$ und dem Winkel an der Spitze $= \frac{2\pi}{n}$. Nach §. 105. konstruire man also ein gleichschenkliches Dreieck mit der Grundseite $\frac{V}{n}$ und dem Winkel an der Spitze $\frac{2\pi}{n}$. Mit einem Schenkel dieses Dreieckes als Radius beschreibe man dann einen Kreis und trage die Grundseite $\frac{V}{n}$ als Sehne in demselben nmal ein; so hat man das geforderte Polygon.

2) Für die zweite Aufgabe sey wieder n die Zahl der Seiten und der Flächenraum des Polygones $= P$; so ist

$\frac{P}{n}$ der Flächeninhalt und $\frac{2\pi}{n}$ der Winkel an der Spitze eines jeden der gleichschenklichen Dreiecke, aus denen das Polygon besteht. Man konstruire nach §. 106. ein solches Dreieck und verfahre dann wie vorher.

Zusatz. Von den beiden Radien (Fig. 80.) QL, PL, welche zur Konstruktion eines solchen Dreieckes in §. 106. gebraucht werden, ist der eine, nämlich QL, dem halben Zentriwinkel, der andere, PL, dem halben Polygonwinkel des zu konstruirenden Polygones gleich. Denn QL ist $=\frac{1}{2}w$ (§. 106.) und w ist hier der Zentriwinkel des Polygones. Der Radius PL war dort $=\frac{1}{2}(\pi+T-w)=A$, gleich dem Winkel an der Grundseite, der in den gleichschenklichen Dreiecken des Polygones dem halben Polygonwinkel gleich ist nach §. 72. Zus.

Von den sphärischen Netzen.

§. 108.

Erklärung. Ein sphärisches Netz ist ein die ganze Kugelfläche einnehmendes System von sphärischen Polygonen (Dreiecke nicht ausgeschlossen), die lauter auswärts gehende (konkave) Winkel haben, und die so zusammenhängen, daß jede Seite eines Polygones zugleich Seite eines angrenzenden ist.

Die Seiten der das Netz bildenden Polygone heißen auch die Seiten des Netzes; die Punkte aber, in welchen solche Seiten zusammentreffen, mögen die Scheitel des Netzes genannt werden.

Zusatz. Aus der Erklärung folgt, daß in jedem Scheitel des Netzes mindestens drei Seiten zusammentreffen müssen; weil zwei Seiten allein, entweder einen überstumpfen (konvexen), oder zwei Winkel, von denen jeder zwei Rechte

beträgt, bilden würden, was bei Polygonen mit lauter auswärts gehenden Ecken nicht möglich ist.

Nach der Zahl der in einem Scheitel sich vereinigenden Seiten ist er ein dreiseitiger, vierseitiger u. s. w., eben so, wie die Figuren des Netzes drei-, vierseitig u. s. w. seyn können.

§. 109.

Lehrsatz. *In jedem sphärischen Netze ist die Zahl der Figuren mit der Zahl der Scheitel zusammengenommen um zwei größer, als die Zahl der sämmtlichen Seiten.*

Beweis. Es sey p die Zahl der Figuren; p′ die der Scheitel; l die Zahl der Seiten des Netzes.

Es ist also zu beweisen, daß stets $p+p'=l+2$ sey. Zu dem Ende seyen die Flächenräume der Figuren des Netzes durch P', P'', P''', ... P^p; die Summen ihrer Winkel bezüglich durch S', S'', S''', ... S^p; und die Zahl der Seiten eines jeden durch N', N'', N''' ..... N^p dargestellt; wo, wie gesagt, p die Zahl der Figuren ist. Nach §. 51. ist nun

$$P' = S' - (N' - 2)\,\pi;$$
$$P'' = S'' - (N'' - 2)\,\pi;$$
$$P''' = S''' - (N''' - 2)\,\pi;$$
$$\vdots$$
$$P^p = S^p - (N^p - 2)\,\pi;$$ daher, wenn man summirt

$$(P'+P''+\ldots+P^p) = (S'+S''+\ldots+S^p) - (N'+N''+\ldots N^p)\,\pi + 2p\pi;$$

Nun ist $P'+P''+\ldots+P^p$ der Kugelfläche gleich, also $= 4\pi$; $S'+S''+S'''+\ldots+S^p$ ist die Summe aller Winkel des Netzes, welche um die Scheitel desselben vertheilt liegen. Da die Summe der um einen Punkt liegenden Winkel immer $=2\pi$, und die Zahl dieser Punkte dieselbe der Scheitel, also $=p'$ ist; so ist $S'+S''+\ldots+S^p = 2p'\pi$. Endlich ist die

Summe $N' + N'' + \ldots + N^p$ das Doppelte der Seitenzahl l; weil jede Seite des Netzes zu zwei Polygonen gehörig bei jedem besonders gezählt worden ist; jede also zweimal vorkommt. Substituirt man diese Ausdrücke in die obige Gleichung, so erhält man

$$4\pi = 2p'\pi - 2l\pi + 2p\pi;$$

oder, wenn mit 2π dividirt wird:

$$2 = p' - l + p; \text{ oder}$$
$$p + p' = l + 2.$$

Zusatz. Da $p + p' - l = 2$ seyn muß, so können p, p', l nicht zugleich ungrade Zahlen seyn; auch können nicht zwei derselben grade, die dritte ungrade, mithin nur entweder alle drei grade, oder eine grade und zwei ungrade seyn.

§. 110.

Aus der allgemeinen Gleichung $p + p' = l + 2$; oder $p + p' - l - 2 = a$; ergeben sich wichtige Folgerungen über die Natur der sphärischen Netze, zu deren Entwickelung wir folgende Gleichung zu Hülfe nehmen.

Die Zahl der Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. sey resp. durch a, b, c, ...; die Zahl der dreiseitigen, vierseitigen, fünfseitigen u. s. w. Scheitel resp. durch a', b', c', ... bezeichnet. Dann ist

$$p = a + b + c + d + \ldots;$$
$$p' = a' + b' + c' + \ldots;$$

Ferner ist $2l = 3a + 4b + 5c + \ldots$; und auch

$$2l = 3a' + 4b' + 5c' + \ldots;$$

Denn da jedes Dreieck 3, jedes Viereck 4, u. s. w. Seiten hat, und a Dreiecke, b Vierecke u. s. w. im Netze sind; so erhält man $3a + 4b + 5c + \ldots$ Seiten, wenn jede bei jedem Polygone, zu dem sie gehört, gezählt wird. Jede kommt aber alsdann zweimal vor; woraus sich die Gleichung ergiebt. Eben so bei den Scheiteln. Es sind a' Scheitel mit 3, b' mit 4, c' mit 5 u. s. w. Seiten; zusammen also $3a' +$

$4b'+5c'+\ldots$ Seiten, von denen aber jede zweimal gezählt ist, weil sie ihrer beiden Endpunkte wegen, zu zwei Scheiteln gehört.

Der Abkürzung wegen sey $b+2c+3d+\ldots$ durch u, und ebenso $b'+2c'+3d'+\ldots$ durch u' bezeichnet. Dann ist

$$2l=3p+u;$$
$$2l'=3p'+u'.$$

Durch diese Gleichungen läßt sich aus der Hauptgleichung $p+p'-l-2=O$; l auf zweierlei Art eliminiren. Die Hauptgleichung nämlich mit 2 multiplicirt und dazu erst die obige: $2l-3p-u=O$ addirt, giebt:

$$2p'-p-u-4=O;$$

dann dazu die andere $2l-3p'-u'=O$ addirt, giebt:

$$2p-p'-u'-4=O.$$

Wir haben also die Gleichungen:

I) $p+p'-l-2=O;$
IIa) $3p-2l+u=O;$
IIb) $3p'-2l+u'=O;$
IIIa) $2p-p'-u'-4=O;$
IIIb) $2p'-p-u-4=O;$

Zwei neue Gleichungen ergeben sich aus IIa) und IIIb) wenn aus denselben p; und aus IIb) und IIIa) wenn p' eliminirt wird. Nämlich, IIIb) mit 3 multiplicirt und dazu IIa) addirt, endlich mit 2 dividirt, giebt:

IVa) $3p'-l-u-6=O;$

Aus den andern beiden Gleichungen folgt:

IVb) $3p-l-u'-6=O;$

Man wird in allen diesen Gleichungen die Symmetrie bemerken, welche hinsichtlich der p, p' in denselben stattfindet. Die Doppelgleichungen in II), III), IV) sind in dieser Rücksicht alternativ; eine geht in die andere über, wenn p mit p' verwechselt wird; mit der einen ist also die andere gegeben. Die Hauptgleichung I) kehrt in sich selbst zurück, wenn man p und p' vertauscht. Dies läßt auf merkwürdige Beziehun-

gen zwiſchen den Figuren und Scheiteln des ſphäriſchen Netzes ſchließen.

§. 111.

Die Gleichung $2l = 3a + 4b + 5c + \ldots$ zeigt, daß $(a+c+e+\ldots)$ eine grade Zahl ſeyn muß.

Denn da $2l$ eine grade Zahl iſt, ſo iſt es $(3a+4b+5c+\ldots)$; wird hievon die grade Zahl $2a+4b+4c+6d+6e+\ldots$) abgezogen, ſo iſt der Reſt: $(a+c+e+\ldots)$ eine grade Zahl.

Und da $p=(a+c+e+\ldots)+(b+d+f+\ldots)$ iſt; ſo iſt $(b+d+f+\ldots)$ grade oder ungrade, je nachdem p es iſt.

Die Gleichung $2l=3a'+4b'+5c'+\ldots$ ergiebt ebenfalls, daß $(a'+c'+e'+\ldots)$ ſtets eine grade, $(b'+d'+f'+\ldots)$ aber grade, oder ungrade iſt, wie p'. Dies in Worten ausgedrückt, heißt: In jedem ſphäriſchen Netze iſt die Summe der Polygone von ungrader Seitenzahl ſtets eine grade Zahl; eben ſo iſt die Summe der Scheitel von ungrader Seitenzahl immer eine grade Zahl.

Aus der Gleichung $3p-2l+u=O$ (IIa.) folgt: daß $2l \geqq 3p$ iſt; das Zeichen $=$ findet nämlich ſtatt, wenn $u=O$ d. h. wenn das Netz nur Dreiecke enthält. Die Gleichung $3p-l-u'-6=O$; zeigt, daß $l<3p$, oder $2l<6p$ iſt. Es hat alſo $2l$ ſeine möglichen Werthe zwiſchen $3p$ und $6p$; wo $3p$ ſelbſt das Minimum iſt. Die Gleichungen IIb) und IVa) geben ebenfalls $2l \geqq 3p'$; und $2l<6p'$. Dieſen Grenzen gemäß können für $2l$ die Gleichungen geſetzt werden:

$\alpha)\ 2l=3p+x;$ $\quad \alpha')\ 2l=3p'+x';$

$\beta)\ 2l=4p+x;$ $\quad \beta')\ 2l=4p'+x';$

$\gamma)\ 2l=5p+x;$ $\quad \gamma')\ 2l=5p'+x';$

wo x, ſo wie x' poſitive ganze Zahlen, die auch Null, je-

doch, wenigstens in den Gleichungen γ, γ', kleiner als p, p′ sind.

In den Gleichungen α, β, γ lassen sich die Figuren und Seiten durch die Scheitel ausdrücken, vermittelst der Gleichungen IIb) und IIIa), welche

$$2l = 3p' + u' \text{ und}$$
$$2p = p' + u' + 4 \text{ geben.}$$

Und eben so lassen sich in α', β', γ', die Seiten und Scheitel durch die Figuren ausdrücken durch die Gleichungen

$$2l = 3p + u \text{ (IIa.); und}$$
$$2p' = p + u + 4 \text{ (IIIb.).}$$

1) Diese Substitution auf die Gleichung (α) angewandt, verwandelt sie in

$$3p' - u' = 12 + 2x;$$

welche, wenn für p′ und u′ ihre Werthe durch a′, b′, c′, ... ausgedrückt werden, die Form annimmt:

A) $3a' + 2b' + c' = 12 + 2x + e' + 2f' + 3g' + \ldots;$

welche für jedes Netz gültig ist. Da hier x, e′, f′, ... nicht negativ seyn können; so folgt, daß a′, b′, c′ nicht zugleich Null seyn können, d. h. daß in jedem Netze dreiseitige, oder vierseitige, oder fünfseitige Scheitel seyn müssen. Der bemerkenswerthe Umstand, daß in dieser Gleichung d′ verschwindet, zeigt, daß die Zahl der sechsseitigen Scheitel ohne Einfluß auf obige Relation zwischen den übrigen Scheiteln ist.

Wird aus der Gleichung α' durch IIa) und IIIb), l und p′ eliminirt, so erhält man

B) $3a + 2b + c = 12 + 2x' + e + 2f + 3g + \ldots;$

die, der Gleichung A) ganz ähnlich, dasselbe Gesetz für die Figuren ausspricht. Jedes Netz muß Dreiecke, Vierecke, oder Fünfecke enthalten. Die Zahl der Sechsecke hat keinen Einfluß auf obige Beziehung zwischen den übrigen Polygonen.

Das einfachste Netz ist dasjenige, dessen Figuren und Scheitel die wenigsten, also 3, Seiten haben. Setzt man

also, dies zu finden, in den Gleichungen (A), (B) außer a und a' alles Uebrige = O, so hat man 3a' = 12; und 3a = 12; also a' = 4; a = 4; **das einfachste Netz besteht also aus 4 Dreiecken und 4 dreiseitigen Scheiteln.**

Ist in (A) x = O; so bezieht sie sich auf Netze mit lauter Dreiecken. Denn alsdann ist in (α) 2l = 3p; und nur bei lauter Dreiecken kann die doppelte Seitenzahl das Dreifache der Figurenzahl seyn.

Eben so gilt die Gleichung (B) für Netze mit lauter dreiseitigen Scheiteln, wenn x' = O ist.

2) Wird aus den Gleichungen (β) und (β'), aus ersterer l, p, aus letzterer l, p', durch (II) und (III) eliminirt; so erhält man

(C) $a' = 8 + x + c' + 2d' + 3e' + \ldots$.

(D) $a = 8 + x' + c + 2d + 3e + \ldots$;

von denen (C) für Netze mit vier- und mehrseitigen Figuren gilt, wenn x nicht O ist. Denn da die Gleichung (β) 2l = 4p + x vorausgesetzt wird, so kann das Netz nicht lauter Vierecke enthalten, weil in dem Falle 2l = 4p seyn muß; noch weniger kann es blos Vierecke und Dreiecke enthalten. Die Gleichung (D) gilt aus ähnlichen Gründen für Netze mit vier- und mehrseitigen Scheiteln. Das erstere Netz muß wenigstens 8 dreiseitige Scheitel; das andere wenigstens 8 Dreiecke enthalten.

Da hier in (C) kein b', in (D) kein b ist; so gilt hier von den vierseitigen Figuren und Scheiteln, was oben von den sechsseitigen bemerkt wurde.

3) Die Gleichungen (γ), (γ') endlich geben nach der oben angedeuteten Elimination:

(E) $a' = 20 + 2x + 2b' + 5c' + 8d' + \ldots$;

(F) $a = 20 + 2x' + 2b + 5c + 8d + \ldots$;

Die Gleichung (E) für Netze mit fünf- und mehrseitigen Figuren; die andern für Netze mit fünf- und mehrseitigen Scheiteln; die ersteren Netze mit wenigstens 20 dreiseitigen Scheiteln; die anderen mit wenigstens 20 Dreiecken.

§. 112.

Wir wollen nun einige speciellere Fälle näher betrachten, die Fälle nämlich, wenn das Netz lauter Dreiecke, Vierecke, oder Fünfecke mit drei-, oder vier-, oder fünfseitigen Scheiteln enthält.

Setzt man in den Gleichungen (A), (B), in der ersten $x=u$, in der zweiten $x'=u'$, wobei die Allgemeingültigkeit nicht beschränkt wird, weil die Gleichungen (α), (α') dadurch in die allgemeinen

$$2l=3p+u \text{ (II b.); und } 2l=3p'+u' \text{ (II a.)}$$

übergehen —; so erhält man die Gleichungen

$$\text{(A) } 3a'+2b'+c'-(e'+2f'+3g'+\ldots.)=12+2b+4c+6d+\ldots;$$

$$\text{(B) } 3a+2b+c-(e+2f+3g+\ldots.)=12+2b'+4c'+6d'+\ldots;$$

Da in (A) kein d', in (B) kein d ist, so können wir mit den vorhergenannten Figuren und Scheiteln noch sechsseitige verbinden. Es habe also das Netz

1, lauter Dreiecke und Sechsecke; und zwar

a) in drei- und sechsseitigen Scheiteln. Dann erhält man aus (A) $3a'=12+6d$;

aus (B) $3a=12+6d'$;

also $a'=4+2d$; $a=4+2d'$;

Die Zahl der Dreiecke ist also immer um 4 größer, als die doppelte Zahl der sechsseitigen Scheitel; die Zahl der dreiseitigen Scheitel um 4 größer, als das Doppelte der Sechsecke. Je nachdem d, oder d' oder beide zugleich Null sind, ergiebt sich das Resultat:

Ein Netz mit lauter Dreiecken in drei- und sechsseitigen Scheiteln, hat nur 4 dreiseitige Scheitel;

ein Netz mit lauter dreiseitigen Scheiteln in Dreiecken und Sechsecken hat nur 4 Dreiecke;

endlich:

ein Netz mit lauter Dreiecken in dreiseitigen Scheiteln, hat nur 4 Dreiecke und 4 Scheitel:

b) Die Dreiecke und Sechsecke hängen in vier- und sechsseitigen Scheiteln zusammen.

Dann giebt (A).....$2b' = 12 + 6d$;

und (B).....$3a = 12 + 2b' + 6d'$;

daher.....$3a = 24 + 6d + 6d'$;

oder..... $a = 8 + 2(d + d')$;

wozu aus (A) folgt: $b' = 6 + 3d$;

Die Zahl der vierseitigen Scheitel ist also um 6 größer, als das Dreifache der Sechsecke; die Dreiecke aber um 8 größer, als das Doppelte der sechsseitigen Figuren und Scheitel zusammen.

Soll das Netz keine Sechsecke enthalten, also $d = O$ seyn, so ist $a = 8 + 2d'$; $b' = 6$, d. h. ein Netz mit lauter Dreiecken in vier- und sechsseitigen Scheiteln hat immer nur 6 vierseitige Scheitel. Ist auch $d' = O$; so ist $a = 8$; $b' = 6$; d. h. ein Netz mit lauter Dreiecken in vierseitigen Scheiteln hat 8 Dreiecke und 6 Scheitel.

c) Das Netz enthalte Dreiecke und Sechsecke in fünf- und sechsseitigen Scheiteln; so wird

(A) .....$c' = 12 + 6d$;

(B) .....$3a = 12 + 4c' + 6d'$;

also, wenn aus (A) der Werth von $4c'$ in (B) substituirt und mit 3 dividirt wird:

$$a = 20 + 8d + 2d';$$

Ist hier $d = O$; so ist $c' = 12$; d. h. in einem Netze von lauter Dreiecken in fünf- und sechsseitigen Scheiteln sind immer grade 12 fünfseitige Scheitel. Setzt man auch $d' = O$; so ist $c' = 12$; $a = 20$; d. h. ein Netz aus lauter Dreiecken und fünfseitigen Scheiteln hat 20 Dreiecke und 12 Scheitel.

2) Das Netz bestehe aus Vierecken und Sechsecken und zwar

a) in drei- und sechsseitigen Scheiteln. Dieser Fall er-

giebt sich aus (1, b). Verwechselt man dort die Scheitel mit den Figuren, so hat man: .....$b = 6 + 2d'$;

$$a' = 8 + 2(d + d');$$

Was dort (1, b) von den Figuren gilt, gilt hier von den Scheiteln, und umgekehrt, also:

Ein Netz mit lauter Vierecken und Sechsecken und dreiseitigen Scheiteln, hat stets 6 Vierecke;

ein Netz mit lauter Vierecken und dreiseitigen Scheiteln hat 6 Vierecke und 8 Scheitel.

Netze aus lauter Vierecken und Sechsecken mit lauter vier- und sechsseitigen Scheiteln sind nicht möglich; eben so wenig können Vierecke und Sechsecke mit lauter fünf- und sechsseitigen Scheiteln ein Netz bilden. (Da in den Gleichungen A und B, dort d', hier d ausgeschlossen ist, so gelten die so eben ausgesprochenen Sätze auch, wenn die Sechsecke und sechsseitigen Scheitel weggelassen werden.) Denn in dem ersteren Falle muß $2l = 4p + x$ seyn, was nach §. 111. 2., wenigstens 8 Dreiecke bedingt. In dem zweiten Falle wird $2l = 5p + x$ vorausgesetzt, wodurch mindestens 20 Dreiecke bedingt werden (§. 111. 3.).

3) Das Netz enthalte Fünfecke und Sechsecke und zwar in drei- und sechsseitigen Scheiteln. Auch dieser Fall ist eine Umkehrung des in (1. c) abgehandelten. Man setze dort Scheitel für Figuren und diese für jene, so hat man:

$$c = 12 + 6d';$$
$$a' = 20 + 8d' + 2d;$$

Daher die Umkehrungen jener Sätze:

in einem Netze mit lauter Fünfecken und Sechsecken in dreiseitigen Scheiteln sind stets 12 Fünfecke;

in einem Netze mit lauter Fünfecken und dreiseitigen Scheiteln sind 12 Fünfecke und 20 Scheitel.

Auch hier ist die Annahme, daß die Fünfecke und Sechsecke in vier- und sechsseitigen Scheiteln, oder in fünf- und sechsseitigen Scheiteln zusammenhängen, unstatthaft; auch wenn die sechsseitigen Scheitel weggelassen werden. Denn auch hier bedingen die zum Grunde liegenden Voraussetzungen: $2l=4p'+x'$; $2l=5p'+x'$ das einemal mindestens 8, das andere Mal wenigstens 20 dreiseitige Scheitel (§. 111. 2. 3.).

Setzt man auch hier d, $d'=0$, so ergiebt sich die Unmöglichkeit eines Netzes aus lauter Fünfecken in lauter vier- oder fünfseitigen Scheiteln.

§. 113.

Erklärung. Verwandte Netze heißen diejenigen sphärischen Netze, welche in der Beziehung zu einander stehen, daß die Figuren und Scheitel des einen (ihren Gattungen und ihrer Anzahl nach) auf dieselbe Weise vorhanden sind, wie umgekehrt die Scheitel und Figuren des andern.

Oder: wenn das eine Netz a Dreiecke, b Vierecke, c Fünfecke u. s. w. und a' dreiseitige, b' vierseitige, c' fünfseitige u. s. w. Scheitel enthält; das andere Netz aber a' Dreiecke, b' Vierecke, c' Fünfecke u. s. w. und a drei-, b vier-, c fünfseitige u. s. w. Scheitel hat; so sind diese Netze verwandte.

§. 114.

Lehrsatz. Jedes sphärische Netz hat ein verwandtes Netz.

Beweis. Für besondere Fälle ist der Beweis durch die in den vorigen Paragraphen aufgestellten Netze schon geführt. Allgemein folgt er aus den §. 110. und §. 111. entwickelten allgemeinen Gleichungen, welche in Bezug auf die Figuren und Scheitel jedes Netzes einerlei Bedingungen aussprechen. Ist nämlich ein Netz mit gewissen Figuren und Schei-

teln möglich, so sind damit jene Gleichungen für diesen Fall durchgängig bestimmt. Verwechselt man nun die Scheitel mit den Figuren, so kehren in den dadurch erhaltenen Gleichungen jene nur zurück, wodurch die Gültigkeit der durch die Verwechselung entstandenen Gleichungen erhellt, aus der sich auf die Möglichkeit des dadurch bezeichneten Netzes schließen läßt.

Durch geometrische Betrachtung ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes leicht auf folgende Weise.

Man setze in jedem Polygone des gegebenen Netzes einen Punkt und verbinde denselben durch Bogen mit den Punkten der anliegenden Figuren; so hat man

1) ein zweites Netz mit so viel Scheiteln, als das gegebene Figuren enthält.

Da nun an jedes mseitige Polygon des gegebenen Netzes sich m andere Polygone anschließen, so gehen m Bogen von dem in jenem Polygone festgesetzten Punkte oder Scheitel aus, der also ein mseitiger ist. Daher hat

2) das zweite Netz eben solche Scheitel, wie das gegebene Figuren hat, in gleicher Anzahl und Gattung.

Da endlich in jedem mseitigen Scheitel des gegebenen Netzes m Figuren desselben zusammenstoßen und aus jeder von dem darin festgesetzten Punkte ein Bogen nach den angrenzenden geht; so wird ein solcher Scheitel von einem mseitigen Polygone des zweiten Netzes eingeschlossen. Mithin entspricht jedem mseitigen Scheitel des gegebenen ein mseitiges Polygon des zweiten Netzes. Daher enthält

3) das zweite Netz eben solche Figuren, wie das erste Polygone, in gleicher Anzahl und Gattung.

Hieraus folgt aber, daß das zweite Netz ein verwandtes des ersten ist.

Zusatz. Jedes Netz hat mehrere verwandte Netze, die sich unter einander durch die Größe der Winkel und Seiten ihrer Figuren unterscheiden. Denn die Lage der in vorstehendem Beweise gesetzten Punkte, welche die Scheitel eines

verwandten Netzes abgeben, ist im Allgemeinen beliebig, daher die Winkel und Seiten des davon abhängigen Netzes veränderlich.

§. 115.

Erklärung. Ein **regelmäßiges Netz** ist dasjenige, in welchem sowohl alle Figuren regelmäßig und von einerlei Gattung sind, als auch die Scheitel.

Ein regelmäßiger Scheitel ist nämlich derjenige, der, wie das regelmäßige Polygon, gleiche Winkel und gleiche Seiten hat.

§. 116.

Lehrsatz. Wenn ein sphärisches Netz aus regelmäßigen Polygonen einer und derselben Gattung besteht, so ist es ein regelmäßiges.

Beweis. Sind die Polygone eines Netzes alle regelmäßig, so sind alle Seiten des Netzes unter sich gleich, weil jedes Polygon mit jedem angrenzenden eine Seite gemein hat. Auch sind die Winkel aller Polygone einander gleich; denn jedes regelmäßige Polygon wird durch die von dem Mittelpunkte desselben nach den Ecken gezogenen Bogen in gleichschenkliche Dreiecke zerlegt, welche in allen Polygonen des Netzes gleiche Grundseiten, gleiche Winkel an der Spitze und gleichartige Schenkel (nämlich $< \frac{\pi}{2}$) haben, die also einander gleich sind (§. 105.). Aus der Gleichheit der Winkel an den Grundseiten aller dieser Dreiecke, folgt die Gleichheit der Winkel aller Polygone des Netzes, von denen jene Winkel Hälften sind.

Da demnach alle Seiten, so wie alle Winkel des Netzes gleich sind, so sind alle Scheitel desselben regelmäßige und — weil die Winkel um jeden Scheitel vier Rechte betragen —

auch von einerlei Gattung. Daher ist das Netz ein regelmäßiges.

§. 117.

Lehrsatz. Enthält ein sphärisches Netz lauter regelmäßige Scheitel von einer und derselben Gattung, so ist es ein regelmäßiges.

Beweis. Da jede Seite des Netzes zu zwei Scheiteln gehört, so ist durch die Regelmäßigkeit der Scheitel zugleich die Gleichheit aller Seiten des Netzes bedingt. Und da alle Scheitel der Regelmäßigkeit wegen gleich viele und gleiche Winkel haben, deren Summen bei jedem Scheitel der Summe von vier Rechten gleich ist; so ist klar, daß auch alle Winkel des Netzes unter sich gleich sind. Hat nun das Netz lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel, so sind alle Polygone desselben regelmäßige und auch von einerlei Gattung, d. h. von gleichviel Seiten, weil sie der überall gleichen Seiten und Winkel wegen sich decken können. Hieraus aber folgt die Regelmäßigkeit für das ganze Netz.

§. 118.

Lehrsatz. Die Mittelpunkte der Polygone eines regelmäßigen Netzes bilden wieder ein regelmäßigs Netz, das jenem verwandt ist.

Beweis. Von dem Mittelpunkte M (Fig. 81.) eines Polygones des regelmäßigen Netzes ziehe man nach den Mittelpunkten N, O, u. s. w. der angrenzenden Polygone Bogen, MN, MO, u. s. w. Es sind nun

1) diese Bogen MN, MO,.... einander gleich.

Denn da die Polygone eines regelmäßigen Netzes unter sich kongruent sind, so sind die Radien MB, NB; OB,.... der um dieselben beschriebenen Kreise einander gleich. Da ferner die Winkel x, y, z, u einander gleich sind (weil der

Radius des umgeschriebenen Kreises jeden Winkel des Polygones halbirt), so ist der Winkel NBM=MBO; mithin die Dreiecke NBM und MBO einander gleich; daher MN=MO. Verbindet man so den Mittelpunkt jedes andern Polygones mit denen der anliegenden, so sind alle diese Verbindungsbogen, wie MN, MO unter sich gleich. Denn es sind die von einem Punkte, wie M, ausgehenden Bogen unter sich gleich und jeder Bogen gehört zu zwei Mittelpunkten. Daher hat das durch diese Bogen gebildete zweite Netz lauter gleiche Seiten.

2) Die Winkel, wie NMO, welche um jeden Mittelpunkt, wie M, herum liegen, sind unter sich gleich. Denn in dem gleichschenklichen Dreiecke NBM ist der Winkel an der Spitze B halbirt; daher stehen MN und BA auf einander senkrecht und in dem gleichschenklichen Dreiecke AMB ist deshalb der Winkel an der Spitze M ebenfalls halbirt. Es ist also n=m; und da m=O ist, wegen Gleichheit der Dreiecke NBM und BMO, so ist n=O; daher der Winkel NMO dem Zentriwinkel AMB gleich. Dasselbe gilt von den übrigen um M liegenden Winkeln, die also einander gleich sind, weil die Zentriwinkel des Polygons ABC.... gleich groß sind. Da alle Polygone des gegebenen Netzes einerlei Zentriwinkel haben, so sind alle Winkel um die Mittelpunkte der Polygone desselben einander gleich. Das zweite Netz hat also gleiche Winkel und gleiche Seiten, woraus sich wie oben die Regelmäßigkeit desselben ergiebt. Daß es dem gegebenen auch verwandt sey, folgt durch die in dem zweiten Beweise des §. 114. gemachten Schlüsse.

Anmerk. Unter den verwandten Netzen, welche nach §. 114. Zus. auch zu jedem regelmäßigen Netze gehören, kann das regelmäßige, schlechthin das verwandte Netz desselben heißen; wobei also der Begriff der Verwandtschaft im engsten Sinne genommen wird.

§. 119.

Lehrsatz. Es können nur fünf regelmäßige Netze möglich seyn; nämlich:

1) ein Netz mit 4 Dreiecken und 4 dreiseitigen Scheiteln;

2) mit 8 Dreiecken und 6 vierseitigen Scheiteln;

3) mit 20 Dreiecken und 12 fünfseitigen Scheiteln;

4) mit 6 Vierecken und 8 dreiseitigen Scheiteln;

5) mit 12 Fünfecken und 20 dreiseitigen Scheiteln.

Beweis. Da sowohl die Figuren, als die Scheitel eines regelmäßigen Netzes von gleicher Gattung seyn müssen (§. 115.), und da kein Netz ohne drei-, vier-, oder fünfseitige Figuren und Scheitel möglich ist (§. 111.); so kann ein regelmäßiges Netz nur aus Dreiecken, Vierecken oder Fünfecken bestehen, die in drei-, vier- oder fünfseitigen Scheiteln zusammenhängen. Es sind aber ferner unmöglich: Netze mit lauter Vierecken und lauter vier- oder fünfseitigen Scheiteln, so wie Netze mit lauter Fünfecken und vier- oder fünfseitigen Scheiteln (§. 112.). Daher bleiben nur noch die fünf im Lehrsatze genannten Netze übrig, denen die dort bezeichneten Figuren und Scheitel nach §. 112. zukommen.

Zusatz 1. Nehmen wir die Buchstaben a, b, c, a′, b′, c′, in derselben Bedeutung, wie früher (§. 110—112.), so lassen sich die fünf regelmäßigen Netze bezeichnen durch:

$$\binom{4a}{4a'};\ \binom{8a}{6b'};\ \binom{20a}{12c'};\ \binom{6b}{8a'};\ \binom{12c}{20a'}.$$

Die wegen Verwandtschaft zusammengehörigen Netze sind: das zweite und das vierte; das dritte und das fünfte. Das erste hat sich selbst zum verwandten.

Zusatz 2. Da das erste, vierte und fünfte Netz drei-

seitige Scheitel haben und die Winkel um jeden zusammen 4 Rechte betragen, so ist, wenn A den Polygonwinkel der Figuren des Netzes bezeichnet, in diesen Netzen $3A = 2\pi$; daher $A = \frac{2}{3}\pi$. In dem zweiten Netze $\binom{8a}{6b}$ ist $4A = 2\pi$; also $A = \frac{1}{2}\pi$. In dem dritten $\binom{20a}{12c}$ ist $5A = 2\pi$; also $A = \frac{2}{5}\pi$.

Zusatz 3. Die Zentriwinkel derselben Polygone — sie seyen durch C bezeichnet — haben mit den Polygonwinkeln der verwandten Netze einerlei Werthe, wie sich ergiebt, wenn man jedes Polygon von seinem Mittelpunkte aus in gleichschenkliche Dreiecke zerlegt. In den Dreiecken des ersten, zweiten und dritten Netzes ist nämlich $3C = 2\pi$; daher $C = \frac{2}{3}\pi$; in dem vierten ist $4C = 2\pi$; $C = \frac{1}{2}\pi$; in dem fünften ist $5C = 2\pi$; $C = \frac{2}{5}\pi$.

Also ist im 1sten Netze $\begin{cases} A = \frac{2}{3}\pi \\ C = \frac{2}{3}\pi \end{cases}$; im 2ten $\begin{cases} A = \frac{1}{2}\pi \\ C = \frac{1}{2}\pi \end{cases}$; im 3ten $\begin{cases} A = \frac{2}{3}\pi \\ C = \frac{2}{3}\pi \end{cases}$; im 4ten $\begin{cases} A = \frac{2}{3}\pi \\ C = \frac{1}{2}\pi \end{cases}$; im 5ten $\begin{cases} A = \frac{2}{3}\pi \\ C = \frac{2}{5}\pi \end{cases}$.

Anmerk. Die Möglichkeit der hier aufgeführten fünf regelmäßigen Netze zeigt folgende Aufgabe.

§. 120.

Aufgabe. Die im vorigen §. bezeichneten fünf regelmäßigen Netze zu konstruiren.

Auflösung. Es kommt zunächst darauf an, eines der Polygone zu verzeichnen, aus denen das zu konstruirende Netz besteht. Da die Zahl der regelmäßigen Figuren, welche das Netz bilden; die Zahl der Seiten jeder Figur und der Inhalt der Kugelfläche ($=4\pi$) bekannt ist; so läßt sich nach §. 107. das gesuchte Polygon aus seinem Flächenraum und seiner Seitenzahl konstruiren.

Hat man dies gefunden, so ist noch zu zeigen, daß die Kugelfläche sich wirklich in die angegebene Anzahl solcher Figuren zerlegen läßt.

Wird der Flächenraum des einzelnen Polygones mit T, die Seitenzahl mit S bezeichnet, so ist für das erste Netz $\binom{4a}{4a'}$ $T=\pi$; $N=3$; für das zweite Netz $\binom{8a}{6b'}$ ist $T=\frac{1}{2}\pi$; $S=3$; für das dritte $\binom{20a}{12b'}$ .... $T=\frac{1}{5}\pi$; $S=3$; für das vierte $\binom{6b}{8a'}$ .... $T=\frac{1}{3}\pi$; $S=4$; für das fünfte $\binom{12c}{20a}$ .... $T=\frac{1}{4}\pi$; $S=5$.

Ohne die oben (§. 107.) angegebene Konstruktion zu wiederholen, nehmen wir an, diese Polygone seyen verzeichnet; wenden uns daher sogleich zu dem zweiten Theile der Auflösung.

1) Für das erste Netz $\binom{4a}{4a'}$.

Es sey. (Fig. 82.) abc ein gleichseitiges Dreieck, dessen Flächenraum $=\pi$, dessen Winkel also jeder $=\frac{1}{3}\pi$ sind. Von dem Mittelpunkte e des umgeschriebenen Kreises ziehe man die Radien ea, eb, ec, welche unter sich gleich sind und die Winkel des Dreieckes halbiren; verlängere sie über a, b, c bis zu ihrem zweiten Durchschnitte in d, dem Gegenpunkte von e; — so bilden die dadurch entstandenen Dreiecke abd, acd, bcd mit abc das erste regelmäßige Netz $\binom{4a}{4a'}$.

Beweis. Wegen des halbirenden Radius ea ist der Winkel $eab=\frac{1}{2}\pi$; daher dessen Nebenwinkel $bad=\frac{1}{2}\pi$. Aus gleichem Grunde ist der Winkel $abd=\frac{1}{2}\pi$. Das Dreieck abd kann sich also mit dem Dreiecke abc decken, wenn man ab des ersteren auf bc des letzteren legt, weil die an beiden Seiten liegenden Winkel gleich sind. Es ist also auch abd ein regelmäßiges Dreieck, dessen Flächenraum $=\pi$ ist.

Da dieselben Schlüsse für die beiden andern Dreiecke acd, bcd gelten; so ist die Richtigkeit der Behauptung klar.

2) Für das zweite Netz $\binom{8a}{6b'}$.

Man nehme (Figur 83.) drei auf einander senkrechte

Hauptkreiſe: abcd, aecf, bedf; ſo bilden dieſe das regelmäßige Netz $\binom{8a}{6b'}$.

Beweis. Da die Hauptkreiſe auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo ſind die Durchſchnitte a, c die Pole von bedf; b, d die Pole von aecf; und e, f die Pole von abcd. Die Seiten der gebildeten acht Dreiecke ſind alſo Quadranten, alle Winkel rechte; daher alle Dreiecke regelmäßig und einander kongruent. Die Scheitel a, b, c, d, e, f entſprechen ebenfalls der Bedingung; daher auch das ganze Netz.

3) Für das dritte Netz $\binom{20a}{12c'}$.

Es ſey (Fig. 84.) das Dreieck abc ein gleichſeitiges und ſein Flächenraum $=\frac{1}{5}\pi$, jeder Winkel alſo $=\frac{3}{5}\pi$. Um den Punkt a als gemeinſchaftliche Spitze trage man noch vier ſolche Dreiecke acd, ade, aef, afb; konſtruire um a', den Gegenpunkt von a, die Gegendreiecke jener fünfe; a'e'f' als Gegendreieck von aef; a'e'd' als Gegendreieck von aed, u. ſ. w.; ziehe von b nach d', von c nach e', von d nach f' u. ſ. w. Bogen bd', ce', df', eb', fc'; endlich in den dadurch entſtandenen fünf Vierecken die Diagonalen be', cf', db' u. ſ. w., wodurch jene Vierecke in zehn Dreiecke zerfallen; — ſo hat man das regelmäßige Netz $\binom{20a}{12c'}$.

Beweis. Daß ſich um a herum jene fünf Dreiecke verzeichnen laſſen, folgt daraus, daß jeder Winkel $=\frac{3}{5}\pi$, die Summe fünf ſolcher Winkel alſo $=2\pi$ iſt. Die um a' herum liegenden fünf Dreiecke ſind jenen als Gegendreiecke gleich, alſo ebenfalls regelmäßige und der Flächenraum eines jeden $=\frac{1}{5}\pi$, jeder Winkel $=\frac{3}{5}\pi$. Es iſt alſo noch zu zeigen, daß von den zehn in der Mitte liegenden jedes dieſelben Eigenſchaften habe.

Die Scheitel b, c, d, e, f haben von a gleiche Entfernung (=ab); daher liegen ſie auf der Peripherie eines Nebenkreiſes, deſſen Mittelpunkt a, deſſen Radius =ab iſt. Die

Punkte b', c', d', e', f' als Gegenpunkte jener liegen also auf der Peripherie des Gegenkreises. Das Viereck d'e'cb ist daher ein sphärisches Parallelogramm, weil zwei einander gegenüberliegende Seiten desselben, d'e' und bc, in Gegenkreisen liegen und einander gleich sind. Durch die Diagonale be' wird also das Parallelogramm d'e'bc in die gleichen Dreiecke d'be', be'c zerlegt. Aus gleichen Gründen ergiebt sich, daß auch das Viereck e'f'bc ein Parallelogramm und das Dreieck bce'=e'f'c ist. Schließt man so weiter auf die folgenden Vierecke, so findet sich, daß die zehn in der Mitte liegenden Dreiecke gleichen Flächenraum haben. Da nun die Summe der fünf obern und der fünf untern Dreiecke $=2\pi$ ist, so nehmen auch die in der Mitte liegenden Dreiecke die halbe Kugelfläche ein; der Flächenraum eines jeden ist also $=\frac{1}{4}\pi$.

Verlängert man die Seite a'e' über e' bis a, wo sich die Seite ae als Fortsetzung desselben Bogens anschließt (weil der Hauptkreis durch a', e' auch durch die Gegenpunkte a, e geht); so wird der Winkel bac dadurch halbirt. Denn es ist Winkel e'ab + baf + fae = e'ac + cad + dae = π; und baf, fae = cad, dae, daher e'ab = e'ac. Die Dreiecke e'ab e'ac sind also einander gleich, weil zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel in beiden gleich sind (ab = ac; ae' = ae'; e'ab = e'ac). Von dem Vierecke abe'c ist also das Dreieck e'ca die Hälfte; und da der Flächenraum bce' = $\frac{1}{4}\pi$ = abc ist, so haben die Dreiecke e'ca, e'cb gleichen Flächenraum. Da sie überdies gemeinschaftliche Grundseite e'c haben, so liegen sie zwischen einerlei Gegenkreisen. Aus demselben Grunde müssen auch die Dreiecke e'bc, e'ba' zwischen einerlei Gegenkreisen liegen. Sind aber die Seiten des Viereckes abe'c paarweise Sehnen je zweier Gegenkreise, so ist das Viereck ein Parallelogramm, das durch die Diagonale bc in zwei, nach Seiten und Winkeln gleiche Dreiecke zerlegt wird. Das Dreieck bce' ist also ebenfalls ein regelmäßiges und jeder Winkel desselben = $\frac{1}{2}\pi$.

Dem Dreiecke bce′ sind nun die anliegenden bd′e′ und ce′f′, diesen die folgenden u. s. w. gleich, als Hälften von Parallelogrammen; mithin ist auch jedes der in der Mitte liegenden zehn Dreiecke ein regelmäßiges, dem Dreiecke abc kongruentes Dreieck. Alle Winkel des Netzes sind $=\frac{1}{3}\pi$, mithin auch die zwölf Scheitel a, b, c, d, e, f, a′, b′, c′, d′, e′, f′, regelmäßig.

4) Für das vierte Netz $\binom{6\,b}{8\,a'}$.

Man nehme drei auf einander senkrechte Kreise (Fig. 83.), welche das zweite regelmäßige Netz $\binom{8\,a}{6\,b'}$ bilden; setze die Mittelpunkte dieser acht regelmäßigen Dreiecke und verbinde durch Bogen jeden mit den der anliegenden Dreiecke; so bilden diese Bogen das regelmäßige Netz $\binom{6\,b}{8\,a'}$.

Beweis ergiebt sich aus dem Beweise für das zweite Netz und aus §. 118.

5) Für das fünfte Netz $\binom{12\,c}{20\,a'}$.

Da dies fünfte regelmäßige Netz das verwandte des dritten ist (§. 119. Zus. 1.); so nehme man in Figur 84. die Mittelpunkte aller Dreiecke jenes Netzes und verbinde jeden durch Bogen mit denen der anliegenden Dreiecke; so erhält man nach §. 118. das fünfte Netz.

Unabhängig von dem dritten Netze läßt es sich auf folgende Art verzeichnen.

Es sey (Fig. 85.) abcde ein regelmäßiges Fünfeck, dessen Flächenraum $=\frac{1}{4}\pi$, jeder Winkel $=\frac{3}{5}\pi$ ist. Von dem Mittelpunkte p des um dasselbe beschriebenen Kreises ziehe man die Radien pa, pb, pc, pd, pe und verlängere sie resp. bis f, g, h, i, k, so daß jede der Verlängerungen af, bg, u. s. w. einer Seite (ab) des Fünfeckes gleich ist; lege an jeden der Punkte f, g, h,.... zwei Winkel, afh′, afi′; bgi′, bgk′ u. s. w., jeden $=\frac{3}{5}\pi$, wodurch man eine Reihe von fünf Fünfecken erhält, von denen jedes eine Seite des un-

ersten Fünfeckes abcde zur Grundseite und zur Spitze einen der Punkte f′, g′, h′, i′, k′ hat; hierauf nehme man in a′, b′, c′, d′, e′ die Gegenpunkte von a, b, c, d, e, welche das Gegenfünfeck a′b′c′d′e′ geben, und verbinde die Ecken desselben mit den obersten Spitzen der vorigen fünf Fünfecke durch die Bogen a′f, b′g, c′h′, d′i′, e′k′; — so hat man das verlangte Netz.

Beweis. Es fällt in die Augen, daß die Fünfecke der untern Reihe abgi′f, afh′ke,..... kongruent sind mit dem untersten Fünfecke abcde; daher ist nur zu erweisen, daß auch den Fünfecken der obern Reihe c′d′i′fh′, c′h′kg′b′,..... diese Eigenschaft zukommt.

Die Punkte f, g, h, i, k haben alle gleiche Entfernung von p, liegen also in einem Nebenkreise, dessen Mittelpunkt p und dessen Radius = pf ist. Auch die Punkte f′, g′, h′, i′, k′ haben einerlei Entfernung von p. Denn die Bogen pi′, ph′ sind einander gleich, weil die Dreiecke pfh′, pfi′ wegen Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels gleich sind; eben so folgt die Gleichheit der übrigen, pg′, pf′, pk′.

Daher liegen f′, g′, h′, i′, k′ in einem Kreise, dessen Mittelpunkt p, dessen Radius = pi′ ist. Es ist aber pi′ das Supplement von pf; denn in dem Dreiecke pfi′ ist der Winkel pfh = ½π; der Winkel pi′f = ½π; weil die Dreiecke pfi′, pgi′ wegen Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels gleich, also der Winkel pi′f = pi′g = ½fi′g ist. Die Summe pfi′ + pi′f ist also = π, daher auch pf + pi′ = π und pi′ = π — pf. Der Kreis also, in welchem die Punkte f′, g′, h′, i′, k′ liegen, ist der Gegenkreis des durch f, g, h, i, k gehenden. Jene Punkte f′, g′,.... sind aber auch die Gegenpunkte der letztern f, g,..... Denn verlängert man den Bogen paf über f, so geht er durch a′, den Gegenpunkt von a; verlängert man ihn rückwärts über p, so geht er, wie leicht in die Augen fällt, senkrecht durch die Mitte der Grundseiten dc des regelmäßigen Fünfeckes dchf′i und daher auch durch die Spitze f′ desselben. Die Punkte f, f′ sind also Durch-

schnitte eines Hauptkreises mit zwei Gegenkreisen, und zwar die auf entgegengesetzten Seiten der Kugel liegenden; daher sind sie Gegenpunkte. Auf gleiche Weise erhellt, daß g und g′; h und h′, u. s. w. Gegenpunkte; hieraus aber, daß die Fünfecke der obern Reihe c′d′f′h′, c′h′k′g′b′ u. s. w. Gegenfünfecke der untern cdif′h, chk′gb u. s. w., also ebenfalls regelmäßige, diesen kongruente Fünfecke sind. Die Regelmäßigkeit der 20 dreiseitigen Scheitel erhellt ebenfalls hieraus, und somit ist die Richtigkeit der Konstruktion erwiesen.

Anmerk. Wie das sphärische Polygon der Durchschnitt der Kugelfläche mit einem körperlichen Winkel ist, dessen Scheitel in dem Mittelpunkte der Kugel liegt; so stehen auch die sphärischen Netze in ähnlicher Beziehung zu den von lauter Ebnen begrenzten Körpern, zu den Polyedern.

Denkt man sich nämlich von dem Mittelpunkte der Kugel grade Linien nach allen Scheiteln eines sphärischen Netzes gezogen, die beliebig verlängert werden, und jede Gruppe dieser Linien, die zu einem Polygone des Netzes gehört, durch eine Ebne geschnitten; so bilden diese Ebnen ein Polyeder, dessen Flächen, Kanten (arrêts) und Ecken den Figuren, Seiten und Scheiteln des Netzes der Anzahl und Gattung nach genau entsprechen. Durch die Ebnen je zweier jener graden Linien wird das Polyeder in körperliche Winkel zerlegt, deren Durchschnitte mit der Kugelfläche die Figuren des Netzes sind. Zu einem und demselben Netze gehören unzählige Polyeder, weil die, die Gruppen jener verlängerten Radien begrenzenden Ebnen unzählige Lagen haben können.

Umgekehrt läßt sich zu jedem Polyeder ein sphärisches Netz konstruiren, wenn man von einem innerhalb desselben beliebig genommenen Punkte nach allen Ecken grade Linien gezogen, und diese durch eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der gemeinschaftliche Ausgangspunkt jener Linien ist, geschnitten denkt. Die Durchschnittspunkte geben die Scheitel eines Netzes, das dem Polyeder entspricht. Da die Lage des in-

nerhalb des Polyeders zu nehmenden Punktes beliebig ist, so lassen sich zu jedem Polyeder unzählige sphärische Netze verzeichnen.

Legt man also den oben gebrauchten Buchstaben p, p', l, a, b, a', b' u. s. w. die entsprechenden Größen des Polyeders unter, so ergeben sich dieselben interessanten Eigenschaften an diesen Körpern, die am Netze gefunden wurden. Der Verwandtschaft der Netze entspricht die Verwandtschaft der Polyeder, der Regelmäßigkeit jener die Regelmäßigkeit dieser; die Sätze §. 116., 117., 118. lassen sich fast wörtlich auf die genannten Körper übertragen.

Verbeſſerungen.

Seite	3.	Zeile	10. v. o.	ſtatt:	und MB leſe man: und ziehe MB.
»	9.	»	9. v. o.	»	Ebne l. m.: Ebnen.
»	9.	»	21. v. o.	»	Ebnen l. m.: Ebne.
»	11.	»	12. v. o.	»	zu l. m.: in.
»	19.	»	6 u. 7. v. o.	»	d l. m.: d″.
»	22.	»	7. v. o.	»	deren Punkte die Elemente l. m.: deren Punkte die Pole der Elemente.
»	25.	»	10. v. u.	»	$\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}$ l. m.: $\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}$.
»	27.	»	1. v. o.	»	von $\bar{\alpha}$ l. m.: an $\bar{\alpha}$.
»	41.	»	2. v. u.	»	ſteht l. m.: folgt.
»	52.	»	9. v. u.	»	als im Quadranten l. m.: als ein Quadrant.
»	54.	»	5. v. u.	»	einen l. m.: einer.
»	55.	»	6. v. o.	»	PRP l. m.: PRP′.
»	56.	»	4. v. o.	»	Seite konſtruirt l. m.: Seite b konſtruirt.
»	61.	»	5. v. u.	»	Aufgabe l. m.: Auflöſung.
»	62.	»	6. v. o.	»	des andern l. m.: das andere.
»	63.	»	19. v. o.	»	muß l. m.: kann.
»	70.	»	17. v. u.	»	ABCD l. m.: ABCD (Fig. 42.).
»	71.	»	7. v. o.	»	nach dem Lehrſatze l. m.: nach dem vorigen Lehrſatze.
»	71.	»	12. v. u.	»	Folglich ABCDE .... l. m.: Folglich muß ABCDE ....
»	73.	»	3 u. 4. v. u.	»	A″ l. m.: A′.
»	74.	»	2 u. 3. v. o.	»	AA″ l. m.: AA′.
»	75.	»	12. v. o.	»	AB,A′B′ l. m.: ABA′B′.
»	76.	»	6. v. u.	»	dieſer l. m.: daher.
»	81.	»	13. v. u.	»	AE′ = AE l. m.: AF′ = AF.
»	89.	»	7. v. o.	»	daſſelbe l. m.: derſelbe.
»	91.	»	4. v. o.	»	in l. m.: an.
»	94.	»	11. v. o.	»	DB > DA l. m.: DB < DA.
»	103.	»	6. v. u.	»	an gleichem l. m.: von gleichem.
»	104.	»	3. v. o.	»	Fig. 61. l. m.: Fig. 57.
»	104.	»	9. v. o.	»	größen l. m.: größten.
»	108.	»	5. v. o.	»	In dem Dreiecke (Fig. 65ı) l. m.: in dem Dreiecke ABB′ (Fig. 65.).

Anmerk. An mehrern Orten ſteht winklich, ſchenklich ſtatt winkelig, ſchenklig; desgleichen reſpektiven ſtatt reſpektiv.

Inhaltsverzeichnis

Die Sphärik

oder

die Geometrie der Kugelfläche

in drei Theilen.

Von

Karl Friedrich Schulz,
Doktor der Philosophie und Konrektor am Gymnasium in Kottbus.

Zweiter Theil.
Die trigonometrische Sphärik.

Mit vier Kupfertafeln.

Leipzig, 1829.
Bei Carl Enobloch.

LLS

Sr. Hochwürden

dem

Königlich Preußischen Ober-Konsistorialrath
Ritter des rothen Adlerordens u. s. w.

Herrn Nolte

zur Feier

Seines fünf und zwanzigjährigen Konsistorial-Jubiläums

als Zeichen innigster Verehrung

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorrede.

Vorliegende Bearbeitung des zweiten Theiles der Sphärik, deſſen Verhältniß zum erſten Theile und zur Sphärik überhaupt bereits angegeben iſt, behandelt dieſelben Gegenſtände, welche im erſten Theile der geometriſchen Betrachtung unterlagen und vervollſtändigt die dort begonnenen Theorieen, indem der Zuſammenhang und die gegenſeitige Abhängigkeit, unter den in gemeinſchaftlicher Beziehung ſtehenden Größen aufgefaßt, und in allgemein arithmetiſchen Ausdrücken dargeſtellt werden. Daher bildet vornämlich die Lehre von den ſphäriſchen Dreiecken — die ſphäriſche Trigonometrie im weiteren Sinne, — demnächſt aber die der ſphäriſchen Vierecke — Parallelogramme, Trapeze, ein- und umgeſchriebene Vierecke — und der Nebenkreiſe — die Kreislehre der Sphärik in beſonderem Sinne — den weſentlichen Inhalt dieſes Werkes.

Ueberall zeigt ſich in den Formeln der ſphäriſchen Geometrie eine, ſchon in den beiden Trigonometrieen ſichtbare, Analogie mit denen der Planimetrie, in welcher ſich ein durchgehendes und ſehr enges Verwandſchaftverhältniß zwiſchen der Geometrie der Eb'ne und

der der Kugelfläche ausſpricht, das beſonders bei denjenigen Sätzen in die Augen ſpringt, welche zu den planimetriſchen Proportionen im Kreiſe und in Dreiecken, zu der Lehre von der Theilung und Verwandlung der Dreiecke und Parallelogramme, namentlich der Verwandlung des Rechteckes in ein Quadrat u. a. m., — die analogen Theorieen der Sphärik enthalten. Es würde nicht unintereſſant ſein, dieſe Analogieen, welche ſich hier, dem Plane des Werkes zufolge, nur beiläufig, zerſtreut und nicht einmal vollſtändig darſtellen und bemerkbar machen ließen, als Gegenſtand beſonderer Unterſuchungen nach allen Richtungen zu verfolgen und die verſchiedenen Geſetze und Formeln der Kugelfläche, die auf der Eb'ne identiſch werden, zu vergleichen. Zur Erläuterung diene das rechtwinklige Dreieck. Es vereinigt dies Dreieck auf der Eb'ne die Merkmale, daß 1) ein Winkel ein rechter; 2) ein Winkel der Summe der übrigen gleich; 3) daß die Summe zweier Winkel einem rechten gleich iſt. Auf der Kugelfläche geben dieſe Merkmale drei weſentlich verſchiedene Dreiecke: 1) das rechtwinklige; 2) das im Halbkreiſe beſchriebene, d. h. deſſen Seite, die jenen Winkel gegenüber ſteht, der ſphäriſche Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes iſt; 3) ein Dreieck, das, wie das vorhergehende, einen ſtumpfen (an der Stelle des planimetriſchen Rechten) und zwei ſpitze Winkel enthält, deſſen ſtumpfer Scheitel aber — wie auch der rechtwinklige Scheitel von Nr. 1. — in einer ſphäri-

ſchen Ellipſe liegt, deren Achſen in beſtimmter Abhängigkeit von einander ſtehen. Die Gleichungen der Kurven, in welchen dieſe drei Dreiecke liegen, müſſen Analogieen zu der planimetriſchen (Mittelpunkts-) Gleichung des Kreiſes:

$$y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x)$$

ſein, die auch in der That in den folgenden Ausdrücken dieſer Gleichungen unverkennbar iſt.

Es iſt nämlich die Gleichung

für Nr. 1. $\text{tang}^2 y = \frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos 2a}$;

oder: $\sin^2 y = \text{tg}(a + x)\,\text{tg}(a - x)$;

für Nr. 2. $\text{tang}^2 y = \frac{\sin^2 a - \sin^2 x}{\cos^2 a}$

$= \frac{\sin(a + x)\sin(a - x)}{\cos^2 a}$;

oder: $\text{tang}^2 \frac{1}{2} y = \text{tg}\frac{1}{2}(a + x)\,\text{tg}\frac{1}{2}(a - x)$;

für Nr. 3. $\text{tang}^2 y = \sin^2 a - \sin^2 x$

$= \sin(a + x)\sin(a - x)$;

In den Beziehungen zwiſchen den Seiten und Winkeln dieſer Dreiecke, finden ſich ähnliche Analogieen zu den Formeln des eb'nen rechtwinkligen Dreieckes, deſſen Eigenſchaften ſich in jedem derſelben auf beſondere Weiſe abſpiegeln.

Unter der ſphäriſchen Trigonometrie im engern Sinne, verſteht man die Lehre von der Berechnung ſphäriſcher Dreiecke, inſofern die Beſtimmungsſtücke nur Seiten und Winkel des Dreieckes betreffen; daher die

dahin gehörigen Formeln nur Relationen zwischen diesen Stücken enthalten. In weiterem Sinne muß die Trigonometrie der Kugelfläche alle Bestimmungsweisen sphärischer Dreiecke umfassen, wie z. B. die Bestimmung des Dreieckes in Rücksicht seiner Lage zwischen Gegenkreisen, oder nach Basis und Höhe. In jenem engern Sinne, bildet die sphärische Trigonometrie den ersten Abschnitt dieses Werkes, und ist — auch mit Rücksicht auf anderweitige, außerhalb der sphärischen Geometrie statt findende Anwendung derselben — insofern mit einiger Vollständigkeit behandelt worden, als von den Formeln derselben die wichtigeren und sonst bemerkenswertheren aufgenommen worden sind. In Betreff der Entwickelung dieser Formeln, hat man bekanntlich zwei Methoden: die geometrische, nach welcher jede Formel mit Hülfe einer speciellen Construktion begründet wird; und die analytische, nach welcher aus einer Fundamentalgleichung, die entweder aus einer besonderen Construktion, oder auch ohne solche aus den Gleichungen und Formeln der analytischen Geometrie gezogen werden kann, die übrigen trigonometrischen Gleichungen und Formeln, blos durch Umwandelungen und Operationen, welche die Natur des Kalkuls darbietet, hergeleitet worden. Ein drittes — analytisch-geometrisches oder geometrisch-analytisches — Verfahren bildet keine besondere Methode, sondern ist ein Gemisch der angegebenen, wobei bald Rechnung, bald Geometrie vorherrschend ist. Es leidet

keinen Zweifel, daß das erſtere, geometriſche, Verfahren nicht ſelten ſchneller zum Ziele führt, als das rechnende, dem hinwiederum eine große Einfachheit und Gleichförmigkeit ſehr zum Vorzuge gereicht. Der Verfaſſer hat die beiderſeitigen Vorzüge in der analytiſchen Entwickelungsweiſe zu vereinigen geſucht, durch Zuziehung einiger, auf der Natur der ſphäriſchen Dreiecke beruhenden Verwandlungsformeln, deren Anwendung wenigſtens zwei Drittel des gewöhnlichen Kalkuls erſpart, mithin dieſe analytiſche Methode einer Kürze fähig macht, die auch in Vergleich mit der geometriſchen kaum mehr wünſchen läßt.

Unter den Gleichungen und Formeln der ſphäriſchen Trigonometrie kommen die meiſten unter der Form

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

vor; namentlich die bekannte Fundamentalgleichung. Da auf dieſer die ganze Trigonometrie beruht, ſo muß ſie die nöthigen Elemente enthalten, um aus ihr die Natur der ſphäriſchen Dreiecke und insbeſondere die Geſetze der Similarität und Ambiguität zu entwickeln. In dieſer Rückſicht iſt jedoch dieſe Gleichung bisher eben ſo unbenutzt, als die erwähnte Theorie vernachläßigt, geblieben; eine Lücke, die wenigſtens in den analytiſchen Darſtellungen dieſer Wiſſenſchaft nicht beſtehen ſollte. Als Verſuch einer Ergänzung derſelben, iſt in der Einleitung eine Diskuſſion der Gleichung

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

vorausgeſchickt worden, deren Ergebniß dann auf jene

dahin gehörigen Formeln nur Relationen zwischen diesen Stücken enthalten. In weiterem Sinne muß die Trigonometrie der Kugelfläche alle Bestimmungsweisen sphärischer Dreiecke umfassen, wie z. B. die Bestimmung des Dreieckes in Rücksicht seiner Lage zwischen Gegenkreisen, oder nach Basis und Höhe. In jenem engern Sinne, bildet die sphärische Trigonometrie den ersten Abschnitt dieses Werkes, und ist — auch mit Rücksicht auf anderweitige, außerhalb der sphärischen Geometrie statt findende Anwendung derselben — insofern mit einiger Vollständigkeit behandelt worden, als von den Formeln derselben die wichtigeren und sonst bemerkenswertheren aufgenommen worden sind. In Betreff der Entwickelung dieser Formeln, hat man bekanntlich zwei Methoden: die geometrische, nach welcher jede Formel mit Hülfe einer speciellen Construktion begründet wird; und die analytische, nach welcher aus einer Fundamentalgleichung, die entweder aus einer besonderen Construktion, oder auch ohne solche aus den Gleichungen und Formeln der analytischen Geometrie gezogen werden kann, die übrigen trigonometrischen Gleichungen und Formeln, blos durch Umwandelungen und Operationen, welche die Natur des Kalkuls darbietet, hergeleitet worden. Ein drittes — analytisch-geometrisches oder geometrisch-analytisches — Verfahren bildet keine besondere Methode, sondern ist ein Gemisch der angegebenen, wobei bald Rechnung, bald Geometrie vorherrschend ist. Es leidet

keinen Zweifel, daß das erstere, geometrische, Verfahren nicht selten schneller zum Ziele führt, als das rechnende, dem hinwiederum eine große Einfachheit und Gleichförmigkeit sehr zum Vorzuge gereicht. Der Verfasser hat die beiderseitigen Vorzüge in der analytischen Entwickelungsweise zu vereinigen gesucht, durch Zuziehung einiger, auf der Natur der sphärischen Dreiecke beruhenden Verwandlungsformeln, deren Anwendung wenigstens zwei Drittel des gewöhnlichen Kalkuls erspart, mithin diese analytische Methode einer Kürze fähig macht, die auch in Vergleich mit der geometrischen kaum mehr wünschen läßt.

Unter den Gleichungen und Formeln der sphärischen Trigonometrie kommen die meisten unter der Form

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

vor; namentlich die bekannte Fundamentalgleichung. Da auf dieser die ganze Trigonometrie beruht, so muß sie die nöthigen Elemente enthalten, um aus ihr die Natur der sphärischen Dreiecke und insbesondere die Gesetze der Similarität und Ambiguität zu entwickeln. In dieser Rücksicht ist jedoch diese Gleichung bisher eben so unbenutzt, als die erwähnte Theorie vernachläßigt, geblieben; eine Lücke, die wenigstens in den analytischen Darstellungen dieser Wissenschaft nicht bestehen sollte. Als Versuch einer Ergänzung derselben, ist in der Einleitung eine Diskussion der Gleichung

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

vorausgeschickt worden, deren Ergebniß dann auf jene

Fundamentalgleichung übergetragen, die Gesetze der Similarität und Ambiguität eben so einfach und kurz, als allgemein ausspricht.

Außerdem ist in der Einleitung eine Zusammenstellung goniometrischer Formeln und Reihen beigegeben worden, in der Absicht, die Unterbrechung des Vortrages durch die sonst unvermeidliche wiederholte Einschiebung derselben zu beseitigen, und dem Leser eine zusammenhängende Uebersicht der Entwickelungen zu erleichtern. Die gegebene Entwickelung der genannten Reihen gilt denjenigen Lesern, die zum Studium der sphärischen Trigonometrie fähig sind, ohne die erforderliche Vertrautheit mit diesem Theile der Analysis schon zu besitzen, denen also mit einer kurzen, elementaren Begründung derselben gedient sein wird. Die Anwendung dieser goniometrischen Reihen auf die sphärische Trigonometrie findet sich in dem ersten der zwei, dem Werke beigefügten, Anhänge, von denen jener einige Nebenzweige der Trigonometrie berührt, die für den Text zu speciell waren, doch an sich zu wichtig, um ganz übergangen zu werden. In dem zweiten Anhange sind einige in den ersten Theil gehörige Sätze und Zusätze nachgeliefert worden, die zur Vervollständigung nicht überflüssig sein möchten.

Kottbus, im April 1829.

Schulz.

Einleitung.

§. 1.

Die trigonometrische Sphärik hat denselben Zweck, wie die geometrische; nämlich, die Eigenschaften der sphärischen Dreiecke, Polygone und Kreise darzustellen. Sie unterscheidet sich jedoch von jener theils dadurch, daß sie die Verhältnisse der Größe und Lage, welche dort nur durch Konstruktion unmittelbar erkannt werden, mit Hülfe der Rechnung ermittelt und bestimmt; theils durch die Eigenthümlichkeit der Untersuchungen, welche die Natur des goniometrischen Kalkuls eröffnet. Indem die Ergebnisse dieses Kalkuls die auf geometrischem Wege nachgewiesenen Verhältnisse genauer bestimmen und unter neuen Beziehungen darstellen, tritt in denselben zugleich die Verwandtschaft, so wie die Verschiedenheit der sphärischen und der ebnen Figuren deutlicher und vielseitiger hervor.

Wie die Lehre von den sphärischen Dreiecken überhaupt die Grundlage der sphärischen Geometrie bildet, so sind auch die Formeln und Gleichungen für sphärische Dreiecke — welche, für sich genommen, die sphärische Trigonometrie ausmachen — die Hauptelemente der trigonometrischen Sphärik.

Die zur Herleitung dieser und anderer Formeln und Gleichungen, so wie überhaupt zum goniometrischen Kalkul, nöthigen Formeln sollen nun zunächst hier aufgestellt und zum Theil entwickelt werden.

Goniometrische Formeln *).

§. 2.

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; daher
$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$;

2) $\text{tang}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $\text{cotg}\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\text{tang}\ \alpha}$;

4) $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}$;

5) $\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}$;

6) $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\text{cotg}^2\alpha} = \frac{\text{tang}^2\alpha}{1+\text{tang}^2\alpha}$;

7) $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\text{tang}^2\alpha} = \frac{\text{cotg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}$;

8) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$;

9) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$;

10) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;

11) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

12) $\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}$;

13) $\text{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\beta}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}$;

14) $\text{cotg}(a+b) = \frac{1 - \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}$;

$= \frac{\text{cotg}\,\alpha\ \text{cotg}\,\beta - 1}{\text{cotg}\,\alpha + \text{cotg}\,\beta}$;

*) In den folgenden Formeln und späterhin überall wird der Kreishalbmesser oder Sinus totus $= 1$ angenommen. Um durch Wiedereinführung desselben die Dimensionen der Formeln herzustellen, braucht man bekanntlich nur die fehlenden Faktoren in den unvollständigen Gliedern durch so oftmalige Hinzufügung des Halbmessers (r), als zur Vervollständigung der Dimension erforderlich ist, zu ergänzen.

15) $\operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \dfrac{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta};$

$= \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha};$

16) $\sin(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = \cos(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \cos(\alpha-\frac{1}{4}\pi)$
$= (\cos\alpha+\sin\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}};$

17) $\sin(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \cos(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = (\cos\alpha-\sin\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}};$

18) $\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = \operatorname{cotg}(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \dfrac{1+\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tang}\alpha} = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha+1}{\operatorname{cotg}\alpha-1};$

19) $\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \operatorname{cotg}(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = \dfrac{1-\operatorname{tang}\alpha}{1+\operatorname{tang}\alpha} = \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha-1}{\operatorname{cotg}\alpha+1};$

20) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

21) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha;$
$= 2\cos^2\alpha-1$
$= 1-2\sin^2\alpha.$

22) $\operatorname{tang} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tang}\alpha}{1-\operatorname{tang}^2\alpha};$

23) $\operatorname{cotg} 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tang}^2\alpha}{2\operatorname{tang}\alpha} = \dfrac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha};$

24) $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1-\cos\alpha;$

$\sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}};$

25) $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1+\cos\alpha;$

$\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}};$

26) $2\sin^2(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = 2\cos^2(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = 1-\sin 2\alpha;$

27) $2\cos^2(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = 2\sin^2(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = 1+\sin 2\alpha;$

28) $\operatorname{tang}^2(\frac{1}{4}\pi-\alpha) = \operatorname{cotg}^2(\frac{1}{4}\pi+\alpha) = \dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha};$

29) $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$

30) $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$

31) $\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\alpha + \dfrac{2}{\operatorname{tang}\alpha}\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha - 1 = 0;$

oder $\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\alpha + 2\operatorname{cotg}\alpha\cdot\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha - 1 = 0;$

32) $\tan g^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{\sin \alpha} . \tan g \frac{1}{2}\alpha + 1 = 0$;

33) $\cot g^2 \frac{1}{2}\alpha - 2 \cot g \alpha \cot g \frac{1}{2}\alpha - 1 = 0$;

34) $\cot g^2 \frac{1}{2}\alpha - \frac{2}{\sin \alpha} . \cot g \frac{1}{2}\alpha + 1 = 0$;

35) $\tan g \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$;

36) $\tan g \frac{1}{2}\alpha = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}$;

37) $\cot g \frac{1}{2}\alpha = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$;

38) $\cot g \frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin a}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\alpha} = \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2}\alpha}{\sin \alpha}$;

39) $\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$;

40) $\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$;

41) $\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$;

42) $\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$;

43) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$;

44) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$;

45) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$;

46) $\cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$;

47) $\sin \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\pi) \cos \frac{1}{2}(\beta - \alpha + \frac{1}{2}\pi)$;
$= 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\pi) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \frac{1}{2}\pi)$

48) $\sin \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\pi) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \frac{1}{2}\pi)$;
$= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \frac{1}{2}\pi) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha + \frac{1}{2}\pi)$;

49) $\tan g \alpha + \tan g \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos a \cos \beta}$;

50) $\tan g \alpha - \tan g \beta = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

51) $\cot g \alpha + \cot g \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$;

52) $\cot g \beta - \cot g \alpha = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$;

53) $\tan g \alpha + \cot g \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$;

54) $\tang\alpha - \cotg\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$;

55) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

56) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$;

57) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha} = \cotg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

58) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$;

59) $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha} = \cotg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$;

60) $\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta} = \tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta).\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$;

61) $\frac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\cos\beta} = \frac{\tang\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\frac{1}{2}\pi)}{\tang\frac{1}{2}(\alpha-\beta+\frac{1}{2}\pi)}$;

62) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

63) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$;

64) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;

65) $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha-\sin\beta} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;

66) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha+\cos\beta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$;

67) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta-\cos\alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$;

68) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha-\sin^2\beta = \cos^2\beta-\cos^2\alpha$;
$= (\sin\alpha+\sin\beta)\ (\sin\alpha-\sin\beta)$;
$= (\cos\beta+\cos\alpha)\ (\cos\beta-\cos\alpha)$;

69) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;
$= \cos^2\alpha-\sin^2\beta$
$= \cos^2\beta-\sin^2\alpha$
$= (\cos\alpha+\sin\beta)\ (\cos\alpha-\sin\beta)$;
$= (\cos\beta+\sin\alpha)\ (\cos\beta-\sin\alpha)$;

70) $\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$;

71) $\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}=\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta=\frac{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$;

72) $\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}=\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$;

73) $\frac{\operatorname{tang}\alpha-\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}=\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang}\beta.\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

74) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$;

75) $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$;

76) $\operatorname{tang}(-\alpha)=-\operatorname{tang}\alpha$;

77) $\sin\alpha=\sin(2r\pi+\alpha)=\sin\big((2r+1)\pi-\alpha\big)$;

78) $\cos\alpha=\cos(2r\pi\pm\alpha)$;

79) $\operatorname{tang}\alpha=\operatorname{tang}(r\pi+\alpha)$;

80) $\left.\begin{matrix}\sin(2r\pi-\alpha)\\ \sin\big((2r+1)+\alpha\big)\end{matrix}\right\}=-\sin\alpha$;

81) $\cos\big((2r+1)\pi\pm\alpha\big)=-\cos\alpha$;

82) $\operatorname{tang}(r\pi-\alpha)=-\operatorname{tang}\alpha$.

Anmerk. In den Formeln 77—82 bedeutet r jede, positive oder negative, ganze Zahl; Null nicht ausgeschlossen.

§. 3.

Aus den Formeln 8—11 ergeben sich folgende:

1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

Denn es ist

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\\
&=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)\\
&=\sin\alpha\sin\gamma\cos^2\beta+\cos\alpha\cos\gamma\sin^2\beta+\sin\alpha\cos\gamma\sin\beta\cos\beta\\
&\qquad+\cos\alpha\sin\gamma\sin\beta\cos\beta\\
&=\sin\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\sin\gamma\sin^2\beta+\cos\alpha\cos\gamma\sin^2\beta\\
&\qquad+\sin\alpha\cos\gamma\sin\beta\cos\beta+\cos\alpha\sin\gamma\sin\beta\cos\beta\\
&=\sin\alpha\sin\gamma+(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma)\sin^2\beta\\
&\qquad+(\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma)\sin\beta\cos\beta\\
&=\sin\alpha\sin\gamma+[\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta+\sin(\alpha+\gamma)\cos\beta]\sin\beta\\
&=\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma).
\end{aligned}$$

2) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\gamma-\cos\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

Dieſelbe Entwickelung, wie vorher, mit dem Unterſchiede, daß man $1-\cos^2\beta$ für $\sin^2\beta$ ſetzt; während vorher $1-\sin^2\beta$ für $\cos^2\beta$ geſetzt wurde.

3) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma);$
$= \sin\alpha\sin\gamma + \cos\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma).$

Es iſt nämlich:

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma)$
$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma);$
$= \cos\alpha\cos\gamma\cos^2\beta + \sin\alpha\sin\gamma\sin^2\beta -$
$(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma)\cos\beta\sin\beta;$ (φ)
$= \cos\alpha\cos\gamma - (\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma)\sin^2\beta -$
$(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma)\cos\beta\sin\beta$
$= \cos\alpha\cos\gamma - \sin\beta[\cos(\alpha+\gamma)\sin\beta + \sin(\alpha+\gamma)\cos\beta];$
$= \cos\alpha\cos\gamma - \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma).$

Für die zweite Formel ſetze man in (φ) $1-\cos^2\beta$ für $\sin^2\beta$.

4) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \sin\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma);$
$= -\cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma);$
dieſelbe Entwickelung.

5) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} = \dfrac{\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\alpha + \sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$

$= \dfrac{\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$

$= \dfrac{\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\alpha - \cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$

$= \dfrac{\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\alpha + \sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$

Denn man ſetze $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} = \dfrac{\sin(\beta+\alpha)\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)}$

und nehme für Zähler und Nenner die aus 1) und 2) ſich ergebenden Werthe.

6) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\beta+\gamma)} = \dfrac{\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\alpha - \sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$

$= \dfrac{\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$

$= \dfrac{\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$

$$= \frac{\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma - \sin\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Setzt man nämlich $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\beta+\gamma)} = \frac{\cos(\beta+\alpha)\cos(\alpha+\gamma)}{\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+\alpha)}$ so erhält man für Zähler und Nenner nach Num. 3. doppelte Werthe.

7) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\beta+\gamma)} = \frac{\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta\sin\alpha + \sin\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$= \frac{\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\beta\cos\alpha + \cos\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$= \frac{\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\beta\cos\alpha + \cos\gamma\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$= \frac{\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\beta\sin\alpha + \sin\gamma\cos(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Denn $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\beta+\gamma)} = \frac{\sin(\beta+\alpha)\sin(\alpha+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)\cos(\gamma+\beta)}$. Der Zähler läßt sich nach Num. 1 und 2, der Nenner nach Num. 4 zerlegen.

8) $$\tang(\alpha+\beta)\tang(\beta+\gamma) = \frac{\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma - \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma + \cos\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma + \cos\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma - \sin\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$

9) $$\frac{\tang(\alpha+\beta)}{\tang(\beta+\gamma)} = \frac{\sin\alpha\cos\gamma + \sin\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\sin\gamma + \sin\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$= \frac{-\cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{-\cos\gamma\sin\alpha + \cos\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\gamma + \sin\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{-\sin\alpha\cos\gamma + \cos\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)};$$

$$= \frac{-\cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\sin\gamma + \sin\beta\cos(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Anmerk. Sind vier Bogen oder Winkel α, β, γ, δ so beschaffen, daß $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ ist; so kann in diesen Formeln für $(\alpha+\beta+\gamma)$ gesetzt werden $\pi-\delta$. Man erhält dann:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\sin\delta;$$
$$= \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\delta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\gamma - \sin\beta\sin\delta;$$
$$= \sin\alpha\sin\gamma - \cos\beta\cos\delta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma - \sin\beta\cos\delta;$$
$$= -\cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\sin\delta;$$ u. ſ. w.

Ein ſolcher Fall findet ſich bei dem eingeſchriebenen Vierecke, deſſen Seiten als die doppelten Sinus der halben zugehörigen Bogen oder Mittelpunktswinkel betrachtet werden können. Die Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreiſes auf die Seiten des Viereckes geben dann die Koſinus derſelben Bogen. Nimmt man alſo in den hier angedeuteten Formeln für $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\sin\delta$ u. ſ. w. die entſprechenden Stücke des Viereckes; für $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\beta+\gamma)$ die halben Diagonalen, ſo ergeben die Formeln eine Menge Beziehungen zwiſchen den Seiten, Diagonalen und deren Entfernungen vom Mittelpunkte.

§. 4.

Als beſondere Fälle der Zuſammenziehung in Faktoren verdienen folgende hier bemerkt zu werden.

1) $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$= 4\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha).$

Man addire nämlich $(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta)$ zu $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, ſo erhält man:

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma;$$
$$= (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) - (\cos^2\alpha\cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma);$$
$$= \sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma)^2;$$
$$= (\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma)(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma);$$
$$= [\cos\gamma - \cos(\alpha+\beta)][\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma];$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)$$

2) $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$
$= -4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma).$

Man addire wieder $(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\cos^2\beta)$ zu

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

so ergiebt sich:

$$(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta) - (\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma);$$

$$= \sin^2\alpha\sin^2\beta - (\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma)^2;$$

$$= (\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma)(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta - \cos\gamma);$$

$$= -\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma\big)\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos\gamma\big);$$

$$= -4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma).\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma).$$

3) $$1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\gamma - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$= -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma).\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma).$$

Addirt man nämlich $(\sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta)$ so wird

$$1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - (\sin^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma)$$
$$= \cos^2\alpha\cos^2\beta - (\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma)^2$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\gamma)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma)$$
$$= \big(\cos(\alpha+\beta) - \cos\gamma\big)\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma\big)$$
$$= -4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma).\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma).$$

4) $$1 - \sin^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma).\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma).$$

5) $$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \sin^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)$$
$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{1}{2}\pi)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).\cos\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\tfrac{1}{2}\pi)\cos\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Setzt man nämlich $\gamma = \frac{1}{2}\pi - \gamma'$ so erhält man die Formel Num. 1 für α, β, γ' in welcher für γ' wieder $\frac{1}{2}\pi - \gamma$ substituirt wird. Der doppelte Ausdruck ergiebt sich aus §. 2, Num. 16. und 17. Eben so lassen sich die folgenden Ausdrücke herleiten.

6) $$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$$

$$= -4\cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)\ \cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{3}{2}\pi).$$
$$\cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)\cos\tfrac{\pi}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)$$
$$= -4\cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)\ \cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{3}{2}\pi).$$
$$\sin\tfrac{\pi}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\tfrac{3}{2}\pi)\ \sin\tfrac{\pi}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\tfrac{3}{2}\pi).$$

7) $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$$= 4\cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)\cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{3}{2}\pi).$$
$$\sin\tfrac{\pi}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)\sin\tfrac{\pi}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi);$$
$$= 4\cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)\ \cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{3}{2}\pi).$$
$$\cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\tfrac{3}{2}\pi)\ \cos\tfrac{\pi}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\tfrac{3}{2}\pi).$$

8) $1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\sin^2\gamma-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$$= -4\sin\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)\ \sin\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{3}{2}\pi).$$
$$\cos\tfrac{\pi}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)\ \cos\tfrac{\pi}{2}(-\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi);$$
$$= -4\sin\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\tfrac{3}{2}\pi)\ \sin\tfrac{\pi}{2}(\alpha+\beta-\gamma+\tfrac{3}{2}\pi).$$
$$\sin\tfrac{\pi}{2}(\alpha-\beta+\gamma+\tfrac{3}{2}\pi)\ \sin\tfrac{\pi}{2}(-\alpha+\beta+\gamma+\tfrac{3}{2}\pi).$$

Goniometrische Reihen.

§. 5.

1) Multiplizirt man die imaginären Binomien $(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})$ und $(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1})$; so erhält man das Produkt

$$\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta).\sqrt{-1};$$

ein imaginäres Binom von derselben Form, das die Summe aus den Bogen der Faktoren enthält.

Eben so ist $(\cos\alpha-\sin\alpha.\sqrt{-1})(\cos\beta-\sin\beta.\sqrt{-1}) =$
$$\cos(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta).\sqrt{-1}$$
und $(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})(\cos\beta-\sin\beta.\sqrt{-1}) =$
$$\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\sqrt{-1};$$

welche Fälle in dem ersten enthalten sind, wenn dort α und β, oder β allein negativ genommen wird.

2) Für Quotienten solcher Binomien findet sich

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1}}{\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1}} = \cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta).\sqrt{-1};$$

hier tritt also die Differenz der Bogen des Zählers und Nenners ein. Es ist nämlich $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1}}{\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1}}$

$$= \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha . \sqrt{-1})\,(\cos\beta - \sin\beta . \sqrt{-1})}{(\cos\beta + \sin\beta . \sqrt{-1})\,(\cos\beta - \sin\beta . \sqrt{-1})}$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta) . \sqrt{-1}}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha-\beta) . \sqrt{-1}.$$

3) Aus (1) folgt, daß das Produkt von n imaginären Binomien

$$(\cos\alpha' + \sin\alpha' . \sqrt{-1})\,(\cos\alpha'' + \sin\alpha'' . \sqrt{-1}) \ldots\ldots (\cos\overset{n}{\alpha} + \sin\overset{n}{\alpha} . \sqrt{-1})$$

$$= \cos(\alpha' + \alpha'' + \ldots\ldots + \overset{n}{\alpha}) + \sin(\alpha' + \alpha'' + \ldots\ldots + \overset{n}{\alpha}) . \sqrt{-1}$$

ist. Die Entwickelung des Produktes jener n Binomien giebt ein Aggregat reeller Größen und ein anderes imaginärer; so daß, wenn jenes mit R, dieses mit $S\sqrt{-1}$ bezeichnet wird, man erhält

$$R + S\sqrt{-1} = \cos(\alpha' + \alpha'' + \ldots\ldots + \overset{n}{\alpha}) + \sin(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) . \sqrt{-1};$$

woraus dann folgt:

$$\cos(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) = R;$$

$$\sin(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) = S; \quad \text{daher}$$

$$\operatorname{tang}(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) = \frac{S}{R}.$$

Setzt man, um R und S zu finden, in der Gleichung

$$R + S\sqrt{-1} = (\cos\alpha' + \sin\alpha' . \sqrt{-1})(\cos\alpha'' + \sin\alpha'' . \sqrt{-1}) \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots (\cos\overset{n}{\alpha} + \sin\overset{n}{\alpha} . \sqrt{-1});$$

$\cos\alpha'(1 + \operatorname{tang}\alpha' . \sqrt{-1})$ für $(\cos\alpha' + \sin\alpha' . \sqrt{-1})$;

$\cos\alpha''(1 + \operatorname{tang}\alpha'' . \sqrt{-1})$ für $(\cos\alpha'' + \sin\alpha' . \sqrt{-1})$ u. s. w.

so erhält man

$$R + S\sqrt{-1} = \cos\alpha' . \cos\alpha'' \ldots\ldots \cos\overset{n}{\alpha}\,(1 + \operatorname{tg}\alpha' . \sqrt{-1}) .$$

$$(1 + \operatorname{tg}\alpha'' . \sqrt{-1}) \ldots\ldots (1 + \operatorname{tg}\overset{n}{\alpha} . \sqrt{-1}).$$

Das Produkt von n Binomien (1+a) (1+b) (1+c)...(1+z) ist nun $= 1 + A + B + C + \ldots\ldots$, wo A die Summe der Unionen a+b+c+....; B die Summe der Binionen ab+ac+....; C die Summe der Ternionen abc+abd+... u. s. w., aus den n Elementen a, b, c, ... z und zwar ohne Wiederholung, bedeuten. Setzt man also für a, b, c, ... resp. $\operatorname{tang}\alpha' . \sqrt{-1}$, $\operatorname{tang}\alpha'' . \sqrt{-1}$, $\operatorname{tang}\alpha''' . \sqrt{-1}$ u. s. w. und sondert die ima-

ginäre Einheit $\sqrt{-1}$ in jeder Klasse (A, B, C....) ab, so läßt sich das zu entwickelnde Produkt so darstellen:

$$R+S\sqrt{-1} = \cos\alpha'.\cos\alpha''.... \overset{n}{\cos\alpha}.$$
$$[1+A.\sqrt{-1}+B(\sqrt{-1})^2+C(\sqrt{-1})^3+.....];$$
$$=\cos\alpha'.\cos\alpha''.... \overset{n}{\cos\alpha}[1+A\sqrt{-1}-B-C\sqrt{-1}+D+....];$$

wo A, B, C, D,... die Summe der Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. aus den Elementen $tg\alpha'$, $tg\alpha''$, $tg\alpha'''$,..... bezeichnen. Hieraus ergiebt sich, wenn die reellen Theile von den imaginären gesondert werden,

$$R=\cos\alpha'\cos\alpha''.... \overset{n}{\cos\alpha}(1-B+D-F+...);$$
$$S=\cos\alpha'.\cos\alpha''.... \overset{n}{\cos\alpha}(A-C+E-...).$$

Daher ist

1) $\cos(\alpha'+\alpha''+...+\overset{n}{\alpha})=\cos\alpha'\cos\alpha''....\overset{n}{\cos\alpha}(1-B+D-F+...)$

2) $\sin(\alpha'+\alpha''+...+\overset{n}{\alpha})=\cos\alpha'\cos\alpha''.... \overset{n}{\cos\alpha}(A-C+E-...);$

3) $\text{tang}(\alpha'+\alpha''+....+\overset{n}{\alpha})=\dfrac{A-C+E-....}{1-B+D-F+....}$

z. B. für n=3 ist

$$\cos(\alpha'+\alpha''+\alpha''')=\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\alpha'''.$$
$$(1-tg\alpha'tg\alpha''-tg\alpha'tg\alpha'''-tg\alpha''tg\alpha''');$$
$$=\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\alpha'''-\sin\alpha'\sin\alpha''\cos\alpha'''$$
$$-\sin\alpha'\sin\alpha'''\cos\alpha''$$
$$-\sin\alpha''\sin\alpha'''\cos\alpha';$$

$$\sin(\alpha'+\alpha''+\alpha''')=\cos\alpha'\cos\alpha''\cos\alpha'''.$$
$$(tg\alpha'+tg\alpha''+tg\alpha'''-tg\alpha'tg\alpha''tg\alpha''');$$
$$=\sin\alpha'\cos\alpha''\cos\alpha'''+\sin\alpha''\cos\alpha'\cos\alpha'''+\sin\alpha'''\cos\alpha'\cos\alpha''$$
$$-\sin\alpha'\sin\alpha''\sin\alpha''';$$

$$\text{tang}(\alpha'+\alpha''+\alpha''')=\frac{\text{tang}\,\alpha'+tg\,\alpha''+tg\,\alpha'''-tg\alpha'tg\alpha''tg\alpha'''}{1-tg\,\alpha'tg\alpha''-tg\alpha''tg\alpha'''-tg\,\alpha'tg\alpha'''}.$$

4) Ist $\alpha'=\alpha''=\alpha'''=.....=\overset{n}{\alpha}$; so werden die Komplexionen jeder Klasse A, B, C,.... identisch. Die Zahl derselben in A ist $=n$; in $B=\dfrac{n(n-1)}{1.2}$; in $C=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ u. s. w. Bezeichnen wir diese Binomialkoeffizienten durch $\overset{1}{Bn}$, $\overset{2}{Bn}$, $\overset{3}{Bn}$ u. s. w., so ergiebt sich aus (3)

1) $\cos(n\alpha) = \cos^n\alpha\,(1 - \overset{2}{Bn}\,tg^2\alpha + \overset{4}{Bn}\,tg^4\alpha - \overset{6}{Bn}\,tg^6\alpha + \ldots)$;

2) $\sin(n\alpha) = \cos^n\alpha\,(\overset{1}{Bn}\,tg\,\alpha - \overset{3}{Bn}\,tg^3\alpha + \overset{5}{Bn}\,tg^5\alpha - \ldots)$:

3) $tg(n\alpha) = \dfrac{\overset{1}{Bn}\,tg\,\alpha - \overset{3}{Bn}\,tg^3\alpha + \overset{5}{Bn}\,tg^5\alpha - \ldots}{1 - \overset{2}{Bn}\,tg^2\alpha + \overset{4}{Bn}\,tg^4\alpha - \ldots.}$

z. B. $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha\,(1 - 3\,tg^2\alpha)$

$= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

$\sin 3\alpha = \cos^3\alpha\,(3\,tg\,\alpha - tg^3\alpha)$

$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

$tang\,3\alpha = \dfrac{3\,tg\,\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3\,tg^2\alpha}$;

5) Indem $\alpha' = \alpha'' = \ldots = \overset{n}{\alpha}$ wird, erhält man aus

$(\cos\alpha' + \sin\alpha'.\sqrt{-1})\,(\cos\alpha'' + \sin\alpha''.\sqrt{-1}) \ldots + (\cos\overset{n}{\alpha} + \sin\overset{n}{\alpha}.\sqrt{-1})$

$= \cos(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}) + \sin(\alpha' + \alpha'' + \ldots + \overset{n}{\alpha}).\sqrt{-1}$;

für Potenzen solcher imaginären Binomien den Ausdruck

$(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^n = \cos(n\alpha) + \sin(n\alpha).\sqrt{-1}$; (φ)

Setzt man α negativ, so ergiebt sich

$(\cos\alpha - \sin\alpha.\sqrt{-1})^n = \cos(n\alpha) - \sin(n\alpha).\sqrt{-1}$.

Daß diese Ausdrücke auch für gebrochene und negative Werthe von n gültig sind, zeigen folgende Schlüsse.

A) Es seien p, q zwei positive ganze Zahlen. Man erhält dann

$(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^{\frac{p}{q}} = ((\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^p)^{\frac{1}{q}}$;

$= (\cos p\alpha + \sin p\alpha.\sqrt{-1})^{\frac{1}{q}}$;

Setzt man das willkührliche $\alpha = \frac{q}{p}.\alpha'$, wodurch $\alpha' = \frac{p}{q}.\alpha$ wird, so wird

$(\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1})^{\frac{p}{q}} = (\cos q\alpha' + \sin q\alpha'.\sqrt{-1})^{\frac{1}{q}}$

$= ((\cos\alpha' + \sin\alpha'.\sqrt{-1})^q)^{\frac{1}{q}}$

$= \cos\alpha' + \sin\alpha'.\sqrt{-1}$

$= \cos\left(\frac{p}{q}\alpha\right) + \sin\left(\frac{p}{q}\alpha\right).\sqrt{-1}$.

B) Für negative, ganze oder gebrochene, Werthe von n ist

$$(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^{-n} = \frac{1}{(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^n}$$

$$= \frac{1}{\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\cos n\alpha-\sin n\alpha.\sqrt{-1}}{(\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1})(\cos n\alpha-\sin n\alpha\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{\cos n\alpha-\sin n\alpha.\sqrt{-1}}{\cos^2 n\alpha+\sin^2 n\alpha}$$

$$= \cos n\alpha-\sin n\alpha.\sqrt{-1}$$

$$= \cos(-n)\alpha+\sin(-n)\alpha.\sqrt{-1}.$$

Hieraus ergiebt sich auch die Gültigkeit der in (4) für $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$, $\operatorname{tang} n\alpha$ entwickelten Reihen, wenn n eine gebrochene, positive oder negative Zahl ist. Denn es ist allgemein:

$$\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1} = (\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^n = \cos^n\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha.\sqrt{-1})^n$$

$$= \cos^n\alpha\,(1+\mathfrak{B}^1_n\operatorname{tg}\alpha.\sqrt{-1}-\mathfrak{B}^2_n\operatorname{tg}^2\alpha-\mathfrak{B}^3_n.\operatorname{tg}^3\alpha.\sqrt{-1}$$

$$+\mathfrak{B}^4_n.\operatorname{tg}^4\alpha+\ldots.);$$

daher für jeden Werth von n

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha\,(1-\mathfrak{B}^2_n.\operatorname{tg}^2\alpha+\mathfrak{B}^4_n.\operatorname{tg}^4\alpha-\mathfrak{B}^6_n.\operatorname{tg}^6\alpha+\ldots);$$

$$\sin n\alpha = \cos^n\alpha\,(\mathfrak{B}^1_n.\operatorname{tg}\alpha-\mathfrak{B}^3_n.\operatorname{tg}^3\alpha+\mathfrak{B}^5_n.\operatorname{tg}^5\alpha-\ldots.);$$

$$\operatorname{tang} n\alpha = \frac{\mathfrak{B}^1_n.\operatorname{tg}\alpha-\mathfrak{B}^3_n.\operatorname{tg}^3\alpha+\mathfrak{B}^5_n\operatorname{tg}^5\alpha-\ldots.}{1-\mathfrak{B}^2_n.\operatorname{tg}^2\alpha+\mathfrak{B}^4_n.\operatorname{tg}^4\alpha-\mathfrak{B}^6_n.\operatorname{tg}^6\alpha+\ldots.}.$$

Anmerk. Nach der allgemeingültigen Formel $(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^n = \cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1}$ läßt sich für jede Potenz und Wurzel des imaginären Binoms $A+B\sqrt{-1}$ ein endlicher Ausdruck angeben und berechnen. Denn setzt man $A=k.\cos\alpha$; $B=k\sin\alpha$, wodurch sich $\operatorname{tang}\alpha=\frac{B}{A}$ und $k=\frac{A}{\cos\alpha}=\frac{B}{\sin\alpha}$ $=\sqrt{A^2+B^2}$ bestimmt; so erhält man für jedes n

$$(A+B\sqrt{-1})^n = k^n(\cos\alpha+\sin\alpha.\sqrt{-1})^n = k^n.(\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1});$$

$$= \frac{A^n}{\cos^n\alpha}.(\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1}) = \frac{B^n}{\sin^n\alpha}(\cos n\alpha+\sin n\alpha.\sqrt{-1})\ (\varphi).$$

Eben ſo $(A-B.\sqrt{-1})^n = \frac{A^n}{\cos^n\alpha}(\cos n\alpha - \sin n\alpha\sqrt{-1})$

$$= \frac{B^n}{\sin^n\alpha}(\cos n\alpha - \sin n\alpha.\sqrt{-1}); \ (\psi)$$

Aus (φ) und (ψ) folgt noch

$$(A+B\sqrt{-1})^n + (A-B\sqrt{-1})^n = \frac{2A^n.\cos n\alpha}{\cos^n\alpha} = \frac{2B^n.\cos n\alpha}{\sin^n\alpha}.$$

§. 6.

Die Aehnlichkeit der Produkte, Quotienten und Potenzen imaginärer Binomien von der Form $\cos\alpha + \sin\alpha.\sqrt{-1}$ mit den Formen der Logarithmen von Produkten, Quotienten und Potenzen deutet auf eine logarithmiſche oder exponentielle Beziehung zwiſchen den goniometriſchen Funktionen und den Kreisbogen, deren Unterſuchung zu ſehr wichtigen Ergebniſſen führt. Setzt man nämlich

$$\log(\cos z + \sin z\sqrt{-1}) = \varphi + \psi\sqrt{-1};$$

ſo findet ſich

$$\varphi + \psi\sqrt{-1} = \log[\cos z\ (1 + \operatorname{tang} z.\sqrt{-1})]$$
$$= \log\cos z + \log(1 + \operatorname{tang} z.\sqrt{-1}).$$

Nach der Formel $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$. erhält man hieraus

$$\varphi + \psi\sqrt{-1} = \log\cos z + \operatorname{tg} z.\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} z.\sqrt{-1})^2 + \tfrac{1}{3}(\operatorname{tg} z.\sqrt{-1})^3 - \ldots$$
$$= \log\cos z + \operatorname{tg} z.\sqrt{-1} + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z.\sqrt{-1} - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 z + \ldots.$$

Sondert man die reellen von den imaginären Gliedern, welche auf beiden Seiten der Gleichung reſp. gleich ſeyn müſſen, ſo erhält man

1) $\varphi = \log\cos z + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 z - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 z + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 z - \ldots.$

2) $\psi = \operatorname{tg} z - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 z + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 z - \ldots.$

Aus der Gleichung (1) ergiebt ſich

$$\varphi = \log\cos z + \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 z - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^4 z + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^6 z - \ldots.)$$
$$= \log\cos z + \tfrac{1}{2}\log(1 + \operatorname{tg}^2 z)$$
$$= \log\cos z + \log\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}$$
$$= \log(\cos z.\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}) = \log\left(\frac{\cos z}{\cos z}\right) = \log 1$$
$$= 0$$

Indem also $\varphi = o$ ist, hat man

$$\log(\cos z + \sin z \cdot \sqrt{-1}) = \psi\sqrt{-1}$$

wo $\psi = tg\,z - \frac{1}{3}tg^3 z + \frac{1}{5}tg^5 z - \ldots.$

Dann ist aber

3) $\cos z + \sin z \cdot \sqrt{-1} = e^{\psi\sqrt{-1}}$;

indem e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Entwickelt man den zweiten Theil der Gleichung (3) nach der Formel

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

so erhält man

$$\cos z + \sin z \cdot \sqrt{-1} = 1 + \psi\sqrt{-1} - \frac{\psi^2}{1.2} - \frac{\psi^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

woraus sich ergiebt

4) $\cos z = 1 - \frac{\psi^2}{1.2} + \frac{\psi^4}{1.2.3.4} - \frac{\psi^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$

5) $\sin z = \psi - \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$

Um ψ durch z unmittelbar auszudrücken, setze man

$$\sin z = \alpha + az + bz^2 + cz^3 + \ldots.$$

Da für $z = o$ auch $\sin z = o$ wird, so muß $\alpha = o$, und

$$\sin z = az + bz^2 + cz^3 + \ldots \text{ (A)}$$

sein. Dividirt man hier auf beiden Seiten mit z, so ist

$$\frac{\sin z}{z} = a + bz + cz^2 + \ldots$$

und für $z = o$ erhält man

$$a = \frac{o}{o}.$$

Das Grenzverhältniß des Bogens und Sinus ist aber $= 1$, *) mithin ist hier $\frac{o}{o} = 1$ daher $a = 1$.

*) Denn es ist $\frac{\sin z}{\text{tang } z} < \frac{\sin z}{z}$, weil $tg\,z > z$ ist; aber $\frac{\sin z}{z} < 1$ weil $z > \sin z$. Also liegt $\frac{\sin z}{z}$ immer zwischen $\frac{\sin z}{tg\,z}$ und 1; oder,

Dieſen Werth in (A) eingeſetzt giebt:

$$\sin z = z + bz^2 + cz^3 + \ldots. \quad (B)$$

Aus (B) und (5) folgt

$$\psi - \frac{\psi^3}{1.2.3} + \frac{\psi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots. = z + bz^2 + cz^3 + \ldots. \quad (C)$$

Wie nun $\cos z + \sin z . \sqrt{-1} = e^{\psi . \sqrt{-1}}$ iſt, ſo iſt auch

$$\cos nz + \sin nz . \sqrt{-1} = (\cos z + \sin z . \sqrt{-1})^n$$
$$= e^{n\psi . \sqrt{-1}}.$$

Demnach findet zwiſchen z und ψ die Relation ſtatt, daß, wenn z in nz verwandelt wird, auch ψ in $n\psi$ übergeht. Setzt man alſo nz, $n\psi$ für z, ψ in (C) ſo erhält man:

$$n\psi - \frac{n^3 \psi^3}{1.2.3} + \frac{n^5 . \psi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots. = nz + n^2 bz^2 + n^3 cz^3 + \ldots.$$

und wenn mit n beiderſeits dividirt wird:

$$\psi - \frac{n^2 \psi^3}{1.2.3} + \frac{n^4 . \psi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots. = z + nbz^2 + n^2 cz^3 + \ldots.$$

Aus dieſer für jeden Werth von n gültigen Gleichung geht für $n = o$ hervor:

$$\psi = z.$$

Die obigen Gleichungen (5), (4), (2), (3) geben alſo, wenn dort z für ψ geſchrieben wird,

I.) $\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$

II.) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots.$

III.) $z = \operatorname{tg} z - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 z + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 z - \ldots.$

IV.) $\cos z + \sin z . \sqrt{-1} = e^{z\sqrt{-1}}.$

Aus negativen Werthen von z erhält man in (IV.)

V.) $\cos z - \sin z \sqrt{-1} = e^{-z\sqrt{-1}}.$

---

da $\frac{\sin z}{\operatorname{tg} z} = \cos z$ iſt, zwiſchen $\cos z$ und 1. Wird nun $z = 0$; ſo wird $\cos z = 1$; daher liegt $\frac{\sin z}{z}$ für $z = 0$ zwiſchen 1 und 1 d. h. $\frac{\sin o}{o} = 1$.

Addirt man (IV.) und (V.), so folgt:

$$\text{VI.)}\quad \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}.$$

Durch Subtraktion ergiebt sich:

$$\text{VII.)}\quad \sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Durch Division der Gleichung (IV.) durch (V.) erfolgt:

$$\frac{\cos z + \sin z.\sqrt{-1}}{\cos z - \sin z.\sqrt{-1}} = e^{2z.\sqrt{-1}};$$ und, wenn

Zähler und Nenner durch $\cos z$ dividirt wird:

$$\text{VIII.)}\quad \frac{1 + \tang z.\sqrt{-1}}{1 - \tang z.\sqrt{-1}} = e^{2z.\sqrt{-1}}.$$

Dividirt man noch (VII.) durch (VI.), so folgt:

$$\text{IX.)}\quad \tang z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}\left(e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}\right)}.$$

Aus der Reihe in (III.) läßt sich die Reihe

$$\text{X)}\quad z = \sin z + \frac{1.}{2.}\frac{\sin^3 z}{3} + \frac{1.3.}{2.4.}\frac{\sin^5 z}{5} + \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\frac{\sin^7 z}{7} + \ldots$$

entwickeln. Denn es ist:

$$\tang z = \frac{\sin z}{\cos z} = \sin z.\sqrt{1 - \sin^2 z} = \sin z(1 - \sin^2 z)^{-\frac{1}{2}};$$

setzt man $\sin z(1 - \sin^2 z)^{-\frac{1}{2}}$ dort für $\tang z$, so giebt die Entwickelung der Potenzen von $(1 - \sin^2 z)$ die bemerkte Reihe.

§. 7.

An die exponentiellen Ausdrücke des vorigen §. knüpft sich folgende merkwürdige, von Delambre zuerst allgemein aufgestellte und, bei der Auflösung sphärischer Dreiecke nützliche Reihe:

I.) Wenn zwischen den Bogen (oder Winkeln) y und x die Gleichung

$$\tang y = \frac{n \sin x}{1 - n \cos x}$$

ſtatt findet, ſo iſt:

$$y = n\sin x + \tfrac{1}{2}n^2\sin 2x + \tfrac{1}{3}n^3\sin 3x + \tfrac{1}{4}n^4\sin 4x + \ldots.$$

welche Reihe um ſo ſchneller konvergirt, je kleiner n iſt. Denn es iſt nach §. 6. VIII.

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1 + \operatorname{tang} y.\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang} y.\sqrt{-1}}.$$

Setzt man hier für tang y aus obiger Gleichung $\frac{n\sin x}{1 - n\cos x}$ ein, ſo iſt:

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1 + \frac{n\sin x}{1 - n\cos x}.\sqrt{-1}}{1 - \frac{n\sin x}{1 - n\cos x}.\sqrt{-1}} = \frac{1 - n\cos x + n\sin x.\sqrt{-1}}{1 - n\cos x - n\sin x.\sqrt{-1}} = \frac{1 - n(\cos x - \sin x.\sqrt{-1})}{1 - n(\cos x + \sin x.\sqrt{-1})}.$$

Für $(\cos x + \sin x.\sqrt{-1})$ und $(\cos x - \sin x.\sqrt{-1})$ die oben IV. und V. bemerkten Werthe geſetzt, giebt,

$$e^{2y\sqrt{-1}} = \frac{1 - n e^{-x\sqrt{-1}}}{1 - n e^{x\sqrt{-1}}};$$

daher, wenn die Logarithmen beider Theile genommen werden,

$$\log e^{2y\sqrt{-1}} = \log\left(1 - n e^{-x\sqrt{-1}}\right) - \log\left(1 - n e^{x\sqrt{-1}}\right);$$

d. i. $2y\sqrt{-1} = -\left[n e^{-x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}n^2 e^{-2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}n^3 e^{-3x\sqrt{-1}} + \ldots.\right]$

$$+ n e^{x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}n^2 e^{2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}n^3 e^{3x\sqrt{-1}} + \ldots.$$

$$= n\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right) + \tfrac{1}{2}n^2\left(e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}\right) + \ldots.$$

Daher, wenn man mit $2\sqrt{-1}$ dividirt,

$$y = n\frac{\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}n^2\frac{\left(e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}n^3\frac{\left(e^{3x\sqrt{-1}} - e^{-3x\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}} + \ldots$$

Nun ist $\frac{e^{rx\sqrt{-1}} - e^{-rx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin rx$, daher

$$y = n\sin x + \tfrac{1}{2}n^2\sin 2x + \tfrac{1}{3}n^3\sin 3x + \ldots.$$

II.) Aus der Gleichung

$$\operatorname{tang} y = \frac{n\sin x}{1 + n\cos x}$$ erhält man

$$y = n.\sin x - \tfrac{1}{2}n^2.\sin 2x + \tfrac{1}{3}n^3.\sin 3x - \tfrac{1}{4}n^4.\sin 4x + \ldots$$

Denn setzt man $x = \pi - x'$, so wird $\operatorname{tang} y = \frac{n.\sin x'}{1 - n\cos x'}$ daher nach (I.)

$$y = n\sin x' + \tfrac{1}{2}n^2\sin 2x' + \tfrac{1}{3}n^3\sin 3x' + \ldots.$$

Aus $x = \pi - x'$ oder $x' = \pi - x$ folgt $rx' = r\pi - rx$; daher $\sin rx' = \sin(r\pi - rx) = -\cos r\pi.\sin rx$. Jenachdem nun r eine gerade oder ungerade Zahl ist, ist $\cos r\pi = +1$ oder $= -1$; also $\sin rx' = -\sin rx$ oder $= +\sin rx$; daher $y = n\sin x - \tfrac{1}{2}n^2\sin 2x + \tfrac{1}{3}n^3\sin 3x - \ldots$

III.) Ist die Gleichung zwischen y und x

$$\operatorname{tang} y = \frac{n.\cos x}{1 - n\sin x}$$; so ist:

$$y = n\cos x + \tfrac{1}{2}n\sin 2x - \tfrac{1}{3}n^3\cos 3x - \tfrac{1}{4}n^4\sin 4x + \ldots.$$

Setzt man nämlich $x = \frac{1}{2}\pi - x'$, so erhält man die Reihe in (I.) für y und x'. Für $\sin rx'$ substituire man dann die Werthe

$$+\cos rx, \quad +\sin rx, \quad -\cos rx, \quad -\sin rx,$$

jenachdem

$$r = 4\varrho + 1, \quad 4\varrho + 2, \quad 4\varrho + 3, \quad 4\varrho \text{ ist.}$$

IV.) Für die Gleichung

$$\operatorname{tang} y = \frac{n\cos x}{1 + n\sin x}$$

ist $y = n\cos x - \tfrac{1}{2}n^2\sin 2x - \tfrac{1}{3}n^3\cos 3x + \tfrac{1}{4}n^4\sin 4x + \ldots.$ welche Reihe sich aus (III.) sogleich ergiebt, wenn man in der vorliegenden Gleichung $x = -x'$ setzt. Für $\sin rx'$ hat man dann $-\sin rx$ zu restituiren.

Anmerk. Da $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ist (§. 2, 35.), so erhält man aus (II.), wenn dort für y und n gesetzt wird $\frac{1}{2}x$ und 1,

die Reihe

$$\tfrac{1}{2}x = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \ldots.$$

oder $x = 2(\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \ldots.)$.

Entwickelt man hier $\sin 2x$, $\sin 3x$, u. ſ. w. nach Potenzen von x (§. 6, I.) ſo erhält man:

$$\tfrac{1}{2}x = (1-1+1-1+1-1+\ldots.)x - (1-2^2+3^2-4^2+\ldots.)\frac{x^3}{1.2.3}$$

$$+ (1-2^4+3^4-4^4+\ldots.)\frac{x^5}{1.2.3.4.5.}$$

$$- (1-2^6+3^6-4^6+\ldots.)\frac{x^7}{1.2\ldots.7}$$

Die Summe der unendlichen Reihe $1-1+1-\ldots$ iſt $=\tfrac{1}{2}$; die der übrigen Null; man erhält alſo $\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}x$. Da dies a priori beſtimmt werden konnte, ſo kann man umgekehrt auf jene Reihen ſchließen.

V.) Auf die Form der Gleichung $\operatorname{tang} y = \frac{n \sin x}{1 - n \cos x}$ läßt ſich die häufig vorkommende Gleichung

$$\operatorname{tang} z = p \operatorname{tang} u$$

bringen. Denn es iſt:

$$1)\ \operatorname{tang}(z-u) = \frac{\operatorname{tang} z - \operatorname{tang} u}{1 + \operatorname{tang} z \operatorname{tang} u} = \frac{p \operatorname{tang} u - \operatorname{tang} u}{1 + p \operatorname{tang}^2 u}$$

$$= \frac{(p-1)\operatorname{tang} u}{1 + p \operatorname{tang}^2 u} = \frac{(p-1)\cos u \sin u}{\cos^2 u + p \sin^2 u}$$

$$= \frac{(p-1)\cos u \,.\, \sin u}{\frac{1}{2}(1+\cos 2u) + p\frac{1}{2}(1-\cos 2u)} = \frac{(p-1)\sin 2u}{1 + p - (p-1)\cos 2u}$$

$$= \frac{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\sin 2u}{1 - \left(\frac{p-1}{p+1}\right)\cos 2u}$$

$$2)\ \operatorname{tang}(z+u) = \frac{\operatorname{tang} z + \operatorname{tang} u}{1 - \operatorname{tang} z \operatorname{tang} u} = \frac{(p+1)\operatorname{tang} u}{1 - p \operatorname{tang}^2 u}$$

$$= \frac{(p+1)\cos u \,.\, \sin u}{\cos^2 u - p \sin^2 u} = \frac{(p+1)\sin 2u}{1 + \cos 2u - p(1-\cos 2u)}$$

$$= \frac{\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\sin 2u}{1 - \left(\frac{p+1}{p-1}\right)\cos 2u}.$$

3) Setzt man $p=\frac{1}{p'}$, so verwandelt sich die Gleichung $\text{tang}\, z = p\, \text{tang}\, u$ in folgende:

$$\text{tang}\, u = p'\, \text{tang}\, z.$$

Aus (1) erhält man daher, wenn dort z und u verwechselt werden und p' für p eintritt

$$\text{tang}(u-z)=\frac{\frac{p'-1}{p'+1}\sin 2z}{1-\frac{p'-1}{p'+1}\cos 2z}=\frac{\frac{1-p}{1+p}\sin 2}{1-\frac{1-p}{1+p}\cos 2z}$$

$$\text{oder } (\text{tang}\, z-u)=\frac{\frac{p-1}{p+1}\sin 2z}{1+\frac{p-1}{p+1}\cos 2z}.$$

Eben so ergiebt sich aus (2)

$$\text{tang}(z+u)=\frac{\frac{p'+1}{p'-1}\sin 2z}{1-\frac{p'+1}{p'-1}\cos 2z}$$

$$=\frac{\frac{1+p}{1-p}\sin 2z}{1-\frac{1+p}{1-p}\cos 2z}.$$

Demnach folgt aus der Gleichung $\text{tang}\, z = p\, \text{tang}\, u$

1) $$\text{tang}(z-u)=\frac{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\sin 2u}{1-\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\cos 2u}=\frac{\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\sin 2z}{1+\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\cos 2z};$$

2) $$\text{tang}(z+u)=\frac{\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\sin 2u}{1-\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\cos 2u}=\frac{\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\sin 2z}{1-\left(\frac{1+p}{1-p}\right)\cos 2z}.$$

Man kann also $\text{tang}(z-u)$ und $\text{tang}(z+u)$ durch Reihen ausdrücken, die nach den Sinus der Vielfachen von u oder von z fortschreiten.

Goniometrische Gleichungen.

§. 8.

Die Auflösung einer goniometrischen Gleichung kann direkt oder indirekt geschehen, jenachdem eine Funktion des gesuchten

Bogens (oder Winkels) unmittelbar entwickelt, oder die Bestimmung desſelben von einer einzuführenden Hülfsgröße abhängig gemacht wird. Letzteres iſt der logarithmiſchen Berechnung wegen und beſonders dann vorzuziehen, wenn die direkte Auflöſung auf eine Gleichung des zweiten, oder eines höheren Grades führen würde. Unter den trigonometriſchen Gleichungen gehören hieher diejenigen, welche von der Form

$$\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

alſo in Bezug auf $\sin x$ und $\cos x$ vom zweiten Grade ſind. Die meiſten Gleichungen für ſphäriſche Dreiecke haben dieſe Form; daher dieſe Gleichung hier näher unterſucht werden ſoll, beſonders in Rückſicht der verſchiedenen Werthe, welche ſie für x zuläßt und deren Abhängigkeit von den Koeffizienten α, β, γ. Um die logarithmiſche Berechnung zu erleichtern ſetze man:

1) $\alpha = n \cos \varphi$; 2) $\beta = n \sin \varphi$;

ſo ergiebt ſich für die Beſtimmung von φ und n

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{\beta}{\alpha}; \quad n = \frac{\alpha}{\cos \varphi} = \frac{\beta}{\sin \varphi};$$

Die Gleichung verwandelt ſich dann in folgende:

$$n(\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = \gamma; \quad \text{d. i.}$$

$$n \cdot \sin(x + \varphi) = \gamma$$

daher $\sin(x+\varphi) = \frac{\gamma}{n} = \frac{\gamma \cdot \cos \varphi}{\alpha} = \frac{\gamma \cdot \sin \varphi}{\beta};$

Bezeichnet man $x+\varphi$ durch ψ, ſo iſt:

$$x = \psi - \varphi$$

wo φ und ψ durch die Gleichungen $\text{tang}\, \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$ und

$\sin \psi = \frac{\gamma \cdot \cos \varphi}{\alpha} = \frac{\gamma \cdot \sin \varphi}{\beta}$ beſtimmt ſind.

Um die möglichen Werthe von x zu beſtimmen, müſſen die möglichen Werthe von ψ mit denen von φ verbunden werden.

Aus der Gleichung $\text{tang}\, \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$, folgt nun

$$\varphi = r\pi + \varphi'$$

wo φ' den kleinſten zur Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ gehörigen Bogen bedeu-

tet, der jedenfalls $< \frac{1}{2}\pi$ und positiv oder negativ, wie die Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$, ist.

Aus $\sin\psi = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi}{\beta}$ folgt dann $\sin\psi = \frac{\gamma \cdot \sin(r\pi + \varphi')}{\beta}$ $= \frac{\gamma \cdot \cos r\pi \cdot \sin\varphi}{\beta}$. Je nachdem nun r eine gerade oder ungerade Zahl ist, ist $\cos r\pi = +1$ oder $= -1$; daher:

$$\sin\psi = +\frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta} \text{ für } r = 2\varrho$$

$$\text{oder } \ldots = -\frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta} \text{ für } r = (2\varrho+1).$$

Bezeichnet man auch mit ψ' den kleinsten Bogen, dessen Sinus $= \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$ ist, so sind die möglichen Werthe von ψ

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \psi = 2\varrho'\pi + \psi' \\ \text{und} & \ldots\ldots = (2\varrho'+1)\pi - \psi' \end{array}\right\} \text{ wenn } r = 2\varrho \text{ ist;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2) & \psi = 2\varrho'\pi - \psi' \\ \text{und} & \ldots\ldots = (2\varrho'+1)\pi + \psi' \end{array}\right\} \text{ wenn } r = 2\varrho+1 \text{ ist.}$$

Hieraus ergeben sich für $x = \psi - \varphi$ die Werthe:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & x = 2\varrho'\pi + \psi' - 2\varrho\pi - \varphi' \\ & \quad = 2(\varrho'-\varrho)\pi + \psi' - \varphi' \\ \text{und} & \ldots\ldots = (2\varrho'+1)\pi - \psi' - 2\varrho\pi - \varphi \\ & \quad = (2\varrho'-2\varrho+1)\pi - (\psi'+\varphi') \end{array}\right\} \text{ für } r = 2\varrho;$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2) & x = 2\varrho'\pi - \psi' - (2\varrho+1)\pi - \varphi' \\ & \quad = (2\varrho'-2\varrho-1)\pi - (\psi'+\varphi') \\ \text{und} & \ldots\ldots = (2\varrho'+1)\pi + \psi' - (2\varrho+1)\pi - \varphi' \\ & \quad = 2(\varrho'-\varrho)\pi + \psi' - \varphi' \end{array}\right\} \text{ für } r = 2\varrho+1.$$

Da in diesen vier Ausdrücken $2(\varrho'-\varrho)$ überhaupt nur eine beliebige grade Zahl und eben so $(2\varrho'-2\varrho+1)$ und $(2\varrho'-2\varrho-1)$ eine ungrade Zahl ausdrücken, so lassen sich dieselben auf zwei Formeln zurückführen, wenn die ungrade Zahl durch $2\varrho+1$, die grade durch 2ϱ bezeichnet wird. Dann erhält man die sämmtlichen Werthe von x in den beiden Ausdrücken

$$1) \quad x = 2\varrho\pi + \psi' - \varphi';$$
$$2) \quad x = (2\varrho+1)\pi - (\psi'+\varphi'); \quad \text{(A)}$$

wo für ϱ jede ganze, positive oder negative, Zahl genommen werden kann.

Daß der Bogen φ' positiv und negativ sein kann, nachdem die Tangente desselben $\frac{\beta}{\alpha}$ positiv oder negativ ist, wurde bereits bemerkt. Es geht hieraus hervor, daß φ' positiv ist, wenn die Koeffizienten α, β gleichartig sind in Rücksicht ihrer Qualität; negativ aber, wenn α, β ungleichartig sind. Eben so hängt die Qualität des ψ' von der Zeichenrelation zwischen α und γ ab. Denn es ist $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \cos\varphi'}{\alpha}$. Da hier $\varphi' < \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist $\cos\varphi'$ positiv, φ' mag positiv oder negativ sein. Daher richtet sich die Qualität von $\sin\psi'$, folglich auch die von ψ' selbst, nur nach der zwischen α und γ vorhandenen Zeichenbeziehung, und zwar ist ψ' positiv, wenn α, γ gleichartig; negativ wenn diese ungleichartig sind.

Die in (A) aufgestellte Formel läßt sich leicht auf alle Fälle anwenden, welche hinsichtlich der Vorzeichen der Koeffizienten α, β, γ statt finden können. Ist die Gleichung z. B.

$$-\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

so setze man $-\alpha = \alpha'$; also

$$\alpha' \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

so ist: $x = \begin{cases} 2\varrho\pi + \psi' - \varphi' \\ (2\varrho+1)\pi - (\psi' + \varphi') \end{cases}$ und

wo $\text{tang}\,\varphi' = \frac{\beta}{\alpha}$; $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$. Da $\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$ so ist der kleinste zur Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ gehörige Bogen φ' entgegengesetzt dem zur Tangente $\frac{\beta}{\alpha}$ gehörigen φ''; eben so ist ψ', dessen Sinus $= \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$ entgegengesetzt dem zum entgegengesetzten Sinus $\frac{\gamma \cdot \sin\varphi''}{\beta}$ gehörigen kleinsten Bogen ψ''. Setzt man also in der Formel für x die Bogen $-\varphi''$ und $-\psi''$ für φ' und ψ', so erhält man:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + \varphi'' - \psi'' & \text{und} \\ (2\varrho+1)\pi + (\varphi'' + \psi'') \end{cases}$$

wo $\operatorname{tang}\varphi'' = \frac{\beta}{\alpha}$; $\sin\psi'' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi''}{\beta}$.

§. 9.

Um die Werthe, welche die Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ für x zwischen den Grenzen 0 und π zuläßt, zu bestimmen, wollen wir die verschiedenen Fälle, welche in Rücksicht der Zeichen- und Größenbeziehungen der Koeffizienten α, β, γ statt finden, unterscheiden. Werden die negativen Werthe dieser Koeffizienten auf das Subtraktionszeichen (—) reduzirt, so daß den Größen α, β, γ selbst nur positive Werthe bleiben; so sind die möglichen Fälle der Zeichenfolgen und Zeichenwechsel folgende:

1) $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$;
2) $\alpha \sin x - \beta \cos x = \gamma$;
3) $-\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$;
4) $\alpha \sin x + \beta \cos x = -\gamma$.

I.) Für die Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ ist:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + \psi' - \varphi' & \text{und} \\ (2\varrho+1)\pi - (\psi' + \varphi') \end{cases}$$

wo $\operatorname{tang}\varphi' = \frac{\beta}{\alpha}$; $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$, also φ', wie ψ' positiv ist. Aus der Gleichung $\sin\psi' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$ oder

$$\frac{\sin\psi'}{\sin\varphi'} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{folgt nun:}$$

1) Wenn $\gamma < \beta$; so ist $\psi' < \varphi'$; die Differenz $\psi' - \varphi'$ also negativ. Die Summe $\psi' + \varphi'$ ist positiv und $< \pi$. Schreibt man also in der Formel für $x - (\varphi' - \psi')$ statt $\psi' - \varphi'$ so ist:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi - (\varphi' - \psi') & \text{und} \\ (2\varrho+1)\pi - (\varphi' + \psi'). \end{cases}$$

Hier liegt nur ein Werth zwischen 0 und π. Der zweite Theil der Formel giebt nämlich für $\varrho = 0$

$$x = \pi - (\varphi' + \psi').$$

2) Iſt aber $\gamma > \beta$; ſo iſt $\psi' > \varphi'$; daher $(\psi' - \varphi')$ und $(\psi' + \varphi')$ poſitiv und $< \pi$. In der Formel

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + (\psi' - \varphi') & \text{und} \\ (2\varrho + 1)\pi - (\psi' + \varphi') \end{cases}$$

erhält man für $\varrho = 0$ zwei Werthe zwiſchen 0 und π, nämlich $x = \psi' - \varphi$ und $x = \pi - (\psi' + \varphi')$.

Für $\gamma = \beta$ iſt $x = 0$ und $x = \pi - 2\varphi'$ oder $\pi - 2\psi'$, da φ' und ψ' alsdann gleich werden.

II.) In der Gleichung $\alpha \sin x - \beta \cos x = \gamma$ oder $\alpha \sin x + \beta' \cos x = \gamma$, wenn nämlich $\beta' = -\beta$ geſetzt wird, iſt das φ' der allgemeinen Formel negativ, weil α und β' ungleichartig ſind; ψ' bleibt poſitiv. Setzt man alſo φ'' für $-\varphi'$, wo dann φ'' poſitiv iſt, ſo iſt:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + (\psi' + \varphi'') & \text{und} \\ (2\varrho + 1)\pi - (\psi' - \varphi''). \end{cases}$$

Aus $\sin \psi' = \frac{\gamma \cdot \sin \varphi'}{\beta'}$ folgt $\sin \psi' = \frac{\gamma \cdot \sin \varphi''}{\beta}$ daher

$$\frac{\sin \psi'}{\sin \varphi''} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

1) Iſt nun $\gamma < \beta$; ſo iſt $\psi' < \varphi''$; daher $(\psi' - \varphi'')$ negativ und

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi + (\psi' + \varphi'') & \text{und} \\ (2\varrho + 1)\pi + (\varphi'' - \psi'). \end{cases}$$

Für $\varrho = 0$ giebt der erſte Theil der Formel $x = \psi' + \varphi''$; der zweite Theil enthält keinen Werth zwiſchen 0 und π. Alſo hat x nur einen Werth, wenn $\gamma < \beta$ iſt.

2) Iſt $\gamma > \beta$; ſo iſt $\psi' > \varphi''$; daher $\psi' - \varphi''$ poſitiv und für $\varrho = 0$ erhält man zwei Werthe:

$$x = \psi' + \varphi'' \quad \text{und} \quad x = \pi - (\psi' - \varphi'').$$

Für $\gamma = \beta$ iſt $\psi' = \varphi'$; daher $x = \pi$ und $x = 2\varphi''$.

III.) In der dritten Gleichung $-\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$, oder, wenn α' für $-\alpha$ geſetzt wird

$$\alpha' \sin x + \beta \cos x = \gamma$$

ſind die Bogen φ' und ψ' der allgemeinen Formel negativ, da α', β ſo wie α', γ ungleichartig ſind.

Setzt man daher $-\varphi''$ und $-\psi''$ für φ', ψ', so ist:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi - (\psi'' - \varphi'') & \text{und} \\ (2\varrho+1)\pi + (\psi'' + \varphi'') \end{cases}$$

und $\sin\psi'' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi''}{\beta}$ oder $\frac{\sin\psi''}{\sin\varphi''} = \frac{\gamma}{\beta}$.

1) Ist $\gamma < \beta$; so ist $\psi'' < \varphi''$, also $(\psi'' - \varphi'')$ negativ. Für $\varrho = 0$ erhält man daher in dem ersten Theile der Formel einen Werth; nämlich $x = \varphi'' - \psi''$. Der zweite Theil giebt keinen.

2) Ist $\gamma > \beta$; so ist $\psi'' > \varphi''$; daher $(\psi'' - \varphi'')$ positiv. Hier findet sich für keinen Werth von ϱ ein zwischen 0 und π liegender Werth von x.

Ist $\gamma = \beta$; so findet sich $x = 0$.

IV.) In der Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = -\gamma$ oder, wenn γ' für $-\gamma$ gesetzt wird: $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma'$ ist ψ' negativ, φ' positiv; daher, wenn $-\psi''$ für ψ' gesetzt wird:

$$x = \begin{cases} 2\varrho\pi - (\varphi' + \psi'') & \text{und} \\ (2\varrho+1)\pi - (\varphi' - \psi''). \end{cases}$$

Aus $\sin\psi' = \frac{\gamma' \cdot \sin\varphi'}{\beta}$ folgt $\sin\psi'' = \frac{\gamma \cdot \sin\varphi'}{\beta}$ oder $\frac{\sin\psi''}{\sin\varphi'} = \frac{\gamma}{\beta}$.

1) Ist $\gamma < \beta$; so ist $\psi'' < \varphi'$ daher für $\varrho = 0$ ein Werth, nämlich $x = \pi - (\varphi' - \psi'')$.

2) Ist $\gamma > \beta$; so ist $\psi'' > \varphi'$ daher $\varphi'' - \psi''$ negativ. Hier ist kein Werth von x zwischen o und π möglich. Für $\gamma = \beta$ ist $x = \pi$.

Vergleichen wir diese vier Fälle, so zeigt sich, daß x 1) immer einen und nur einen Werth zwischen o und π hat, wenn $\gamma < \beta$ ist. Ist aber 2) $\gamma > \beta$, so hat x entweder zwei Werthe, oder keinen; jenes, wenn ψ' positiv, dieses, wenn ψ' negativ ist; oder: zwei Werthe hat x, wenn α und γ gleichartig sind; keinen, wenn α und γ ungleichartig sind. In beiden Fällen sind die zwischen o und π möglichen Werthe von der Form $\psi' - \varphi'$, oder $\pi - (\psi' + \varphi')$,

wo ψ', φ' positiv oder negativ sind, jenachdem in der allgemeinen Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ α, β und α, γ gleichartig oder ungleichartig sind. Fassen wir daher alle Fälle zusammen, so ist

1) wenn $\gamma < \beta$

$$x = \left\{\begin{matrix} \pi - (\psi' + \varphi') \\ \text{oder} \\ \psi' - \varphi' \end{matrix}\right\} \text{jenachdem } \alpha \left\{\begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{oder} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix}\right\} \text{mit } \beta$$

2) wenn $\gamma > \beta$

$$x = \left\{\begin{matrix} (\psi' - \varphi') \text{ und } \pi - (\psi' + \varphi') \\ \text{oder} \\ \text{unmöglich} \end{matrix}\right\} \text{jenachdem } \alpha \left\{\begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{oder} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix}\right\} \text{mit } \gamma.$$

Aus dem Umstande, daß in den innerhalb der genannten Grenzen für x möglichen Werthen — nämlich $\psi' - \varphi'$ und $\pi - (\psi' + \varphi')$ oder $[(\pi - \psi') - \varphi']$ — beidemale φ' subtraktiv steht und sich entweder mit ψ' oder mit $(\pi - \psi')$ verbindet, ergiebt sich eine andere Darstellung der gesuchten Werthe, die in dem Falle, wenn in der Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ nur positive Werthe von x zwischen o und π vorausgesetzt werden, vortheilhafter ist. Man kann nämlich in der Gleichung $\text{tang } \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$ den Bogen φ sogleich auf den kleinsten Werth (φ') beschränken; in der Gleichung $\sin \psi = \frac{\gamma \cdot \sin \varphi}{\beta}$ aber für ψ den kleinsten Werth (ψ') und dessen Supplement $(\pi - \psi')$ — das bei einem negativen φ' größer als π wird — nehmen. Indem alsdann der Bogen ψ zweideutig wird, läßt sich die Zweideutigkeit der Gleichung

$$x = \psi - \varphi$$

auf folgende Weise entscheiden:

1) Wenn $\gamma \leqq \beta$

so ist $\psi \gtrless \frac{1}{2}\pi$, jenachdem $\alpha \left\{\begin{matrix} \text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig} \end{matrix}\right\}$ mit β;

2) Wenn $\gamma > \beta$

so ist $\left\{\begin{matrix}\psi \text{ zweideutig} \\ \text{oder } x \text{ unmöglich}\end{matrix}\right\}$ jenachdem $\alpha \left\{\begin{matrix}\text{gleichartig} \\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ mit γ ist.

§. 10.

Auf die Form der Gleichung $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$ lassen sich viele Gleichungen von andern Formen bringen. So wird die Gleichung $A \sin^2 x + B \sin x \cos x = C$, welche in Bezug auf $\sin x$ und $\cos x$ vom vierten Grade ist, dahin reduzirt, wenn man für $\sin^2 x$, $\sin x \cos x$ die Werthe $\frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\frac{\sin 2x}{2}$, substituirt. Man erhält dann:

$$B \sin 2x - A \cos 2x = 2C - A$$

daher $x = \left\{\begin{matrix}\varrho\pi + \frac{1}{2}(\psi' - \varphi') & \text{und} \\ \varrho\pi + \frac{1}{2}(\pi - \psi' - \varphi') & (\text{§. 8.})\end{matrix}\right.$

wo $\operatorname{tang} \varphi' = -\frac{A}{B}$; $\sin \psi' = \frac{(2C - A)\cos \varphi'}{B}$.

Eben so die Gleichung $A \operatorname{tang}^2 x + B \operatorname{tang} x = C$, wenn man beide Theile mit $\cos^2 x$ multiplizirt und dann wie vorher verwandelt. Es ergiebt sich dann:

$$B \sin 2x - (A + C) \cos 2x = C - A.$$

Eine vortheilhaftere Auflösung dieser Gleichung bieten die §. 2. No. 31. und 32. bemerkten Formeln dar. Ist nämlich

1) in der Gleichung $A \operatorname{tang}^2 x + B \operatorname{tang} x = C$ der zweite Theil C positiv, so setze man $\operatorname{tang} x = z \cdot \sqrt{\frac{C}{A}}$ und dividire die Gleichung durch 1, so erhält man:

$$z^2 + \frac{B}{\sqrt{A.C}}\, z = 1.$$

Nimmt man $\frac{B}{\sqrt{AC}} = \frac{2}{\operatorname{tang} \varphi}$ also $\operatorname{tang} \varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}$, so wird:

$$z^2 + \frac{2}{\operatorname{tang} \varphi} \cdot z = 1.$$

Nun ist aber $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi + \frac{2}{\operatorname{tang} \varphi} \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = 1$; also $z = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$.

Aus $\tang\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}$ folgt $\varphi = r\pi + \varphi'$; $\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}r\pi + \frac{1}{2}\varphi'$, daher $\tang\frac{1}{2}\varphi$ sowohl $= \tang\frac{1}{2}\varphi'$ als $= -\cotg\frac{1}{2}\varphi'$; mithin $z = \tang\frac{1}{2}\varphi'$ und $= -\cotg\frac{1}{2}\varphi'$.

Da $\tang x = z\sqrt{\frac{C}{A}}$ ist, so erhält man:

$$\tang x = \tang\tfrac{1}{2}\varphi'\sqrt{\tfrac{C}{A}}$$

und $\ldots\ldots = -\cotg\frac{1}{2}\varphi'\sqrt{\frac{C}{A}}$.

2) Ist C negativ, so setze man $C = -C'$. Aus der Gleichung $A\tang^2 x + B\tang x = -C'$ erhält man wie oben

$$z^2 - \frac{B}{\sqrt{AC}}\,z = -1$$

wenn $\tang x = -z\sqrt{\frac{C'}{A}}$ gesetzt wird. Nimmt man hier $\frac{B}{\sqrt{AC}} = \frac{2}{\sin\varphi}$, so wird:

$$z^2 - \frac{2}{\sin\varphi}\,z = -1.$$

Da nun $\tang^2\frac{1}{2}\varphi - \frac{2}{\sin\varphi}\cdot\tang\frac{1}{2}\varphi = -1$ ist; so folgt: $z = \tang\frac{1}{2}\varphi$. Aus $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}$ erhält man $\varphi = 2r\pi + \varphi'$ und $= 2r\pi + (\pi - \varphi')$ daher $\tang\frac{1}{2}\varphi = \tang\frac{1}{2}\varphi'$ und $= \cotg\frac{1}{2}\varphi'$; folglich $z = \tang\frac{1}{2}\varphi'$ und $= \cotg\frac{1}{2}\varphi'$; endlich:

$$\tang x = -\tang\tfrac{1}{2}\varphi'\sqrt{\tfrac{C}{A}}$$

und $\ldots = -\cotg\frac{1}{2}\varphi'\sqrt{\frac{C}{A}}$.

Von dieser Auflösung läßt sich auch auf die Gleichung $\alpha\sin x + \beta\cos x = \gamma$ Anwendung machen. Denn setzt man $2\sin\frac{1}{2}x.\cos\frac{1}{2}x$ und $2\cos^2\frac{1}{2}x - 1$ resp. für $\sin x$ und $\cos x$ und dividirt dann mit $\cos^2\frac{1}{2}x\left(=\frac{1}{1+\tg^2\frac{1}{2}x}\right)$ so erhält man: $(\beta+\gamma)\tang^2\frac{1}{2}x - \alpha\tang\frac{1}{2}x = \beta - \gamma$.

Die in §. 9. gefundenen Bedingungen, unter welchen zwischen o und π nur ein Werth, oder zwei, oder keiner möglich ist, lassen sich auch hier und noch einfacher nachweisen.

Gleichungen für sphärische Dreiecke.

§. 11.

Um aus gegebenen Stücken eines sphärischen Dreieckes eines der übrigen durch Rechnung zu finden, ist eine Gleichung zwischen vier Größen zu suchen, indem drei Stücke zur Bestimmung eines Dreieckes erforderlich und hinreichend sind. Eine vollständige Lösung der Aufgabe, aus beliebigen drei Stücken jedes der übrigen zu finden, bedingt demnach so viel Gleichungen, als unter den Elementen a, b, c, A, B, C, — den Seiten und Winkeln des sphärischen Dreieckes — Verbindungen zu vieren möglich sind, also 15 Gleichungen für die 15 Verbindungen.

abcA	abAB	acAB	bcAB	aABC
abcB	abAC	acAC	bcAC	bABC
abcC	abBC	acBC	bcBC	cABC

Wenn indeß diese Gleichungen allgemeingültig sind, also von besonderen Werthen der einzelnen Stücke unabhängig nur die durch die Lage derselben gegen einander bedingten wechselseitigen Beziehungen der Größe aussprechen; so können unter denselben nur so viel wesentlich verschiedene sein, als wesentliche Verschiedenheiten in der Lage von je vier Stücken des Dreiecks möglich sind und es muß eine und dieselbe Form der Gleichung für alle diejenigen Stücke statt finden, welche in dieser Rücksicht unter gleichen Beziehungen stehen. Hat man z. B. für die Seite a, b und die Winkel C, A eine allgemeingültige Gleichung

$$F(a, b, C, A) = o$$

die also nur überhaupt die gegenseitige Abhängigkeit ausdrückt, welche zwischen irgend zwei Seiten, dem eingeschlossenen Winkel und dem einer dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ob-

waltet; so ist damit auch die Abhängigkeit unter den vier Stücken a, b, C, B gegeben, in denen die Seite b sich der Lage nach zu a, C, B eben so verhält, wie a zu b, C, A; also die Gleichung

$$F(b, a, C, B)$$

gegeben, in welcher a und b ihre vorigen Funktionen vertauschen, indem zugleich B für A eintritt.

Es ergiebt sich hieraus, daß in jeder allgemeinen Gleichung zwischen Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes jede Seite nebst dem ihr gegenüberliegenden Winkel verwechselt werden kann gegen jede andere Seite und den ihr gegenüberliegenden Winkel. *)

Demnach gehören in den oben aufgestellten 15 Verbindungen diejenigen, welche nur durch solche Verwechselungen sich von einander unterscheiden unter eine und dieselbe Gleichung und es bleiben als wesentlich verschiedene nur 4 Gruppen derselben übrig, für welche eben so viel verschiedene Gleichungen erforderlich seyn werden, die sich vorläufig durch:

$F(a, b, c, A) = o$ (I.) (für 3 Verbindungen),
$F(a, b, A, B) = o$ (II.) (für 3 Verb.),
$F(a, b, A, C) = o$ (III.) (für 6 Verb.),
$F(a, A, B, C) = o$ (IV.) (für 3 Verb.)

andeuten lassen.

Der oben ausgesprochene Grundsatz der Vertauschung, durch welchen auch die Entwickelungen der trigonometrischen Gleichungen und Formeln vortheilhaft abgekürzt und vereinfacht werden, leidet noch größere Ausdehnung. Denn wie aus einer allgemeinen Gleichung

$$F(a, b, c, A, B, C) = o \quad (\alpha)$$

durch Vertauschung von a, A mit b, B die andere eben so allgemeine Gleichung:

*) Allgemein muß die Gleichung sein. Denn von Gleichungen, welche etwa von rechtwinkligen oder gleichschenkligen Dreiecken hergenommen sein möchten, kann das hier Gesagte nicht unumschränkt gelten.

$$F(b, a, c, B, A, C) = o$$

hergeleitet wird, so kann in dieser wieder a, A mit c, C verwechselt werden, wodurch sich die Gleichung

$$F(b, c, a, B, C, A) = o$$

ergiebt, welche unmittelbar aus (α) abgeleitet wird, wenn man jede Seite und jeden Winkel mit dem nächstfolgenden vertauscht, wobei auf das letzte Element c, C das erste a, A folgt. Verwechselt man umgekehrt erst a, A mit c, C; dann mit b, B, so erhält man

$$F(c, a, b, C, A, B) = o,$$

wo jedes Element mit dem vorhergehenden wechselt. Es kann also in einer allgemeingültigen Gleichung jedes der Elemente a, b, c und A, B, C mit dem folgenden oder mit dem vorhergehenden vertauscht werden.

Ein zweites Hülfsmittel zur Abkürzung des trigonometrischen Kalkuls bietet eine zweite, auf der Polarität der sphärischen Dreiecke beruhende Vertauschungsregel dar. Denn da jedes sphärische Dreieck ein Polardreieck hat, so giebt jede allgemeine Gleichung

$$F(a, b, c, A, B, C) = o,$$

da sie auf das Polardreieck angewendet werden kann, eine zweite Gleichung

$$F(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = o,$$

die aus der ersten abgeleitet wird, wenn jede Seite mit dem Supplemente des gegenüberliegenden Winkels, und umgekehrt, wechselt. Man kann also in jeder allgemeinen Gleichung für jede Seite und jeden Winkel die Supplemente der gegenüberliegenden Winkel und Seiten setzen.

Hieraus ist klar, wie die vierte der obigen Hauptgleichungen mittelst dieser Vertauschung sich aus der ersten muß ableiten lassen; mithin eigentlich nur drei Hauptgleichungen zu entwickeln seyn werden.

Eine dritte Vertauschung anderer Art ergiebt das Neben-

dreieck. Jedes ſphäriſche Dreieck $\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma\\ a & b & c\\ A & B & C\end{matrix}\right\}$ hat die Nebendreiecke $\left\{\begin{matrix}\overline{\alpha} & \beta & \gamma\\ a & \overline{b} & \overline{c}\\ A & \overline{B} & \overline{C}\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}\alpha & \overline{\beta} & \gamma\\ \overline{a} & b & \overline{c}\\ \overline{A} & B & \overline{C}\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta & \overline{\gamma}\\ \overline{a} & \overline{b} & c\\ \overline{A} & \overline{B} & C\end{matrix}\right\}$,

von denen jedes eine Seite und den gegenüberliegenden Winkel mit jenem gemein hat, während die übrigen Seiten und Winkel die Supplemente der übrigen Seiten und Winkel des andern Dreieckes ſind. Die allgemeingültige Gleichung

$$F(a, b, c, A, B, C) = o$$

auf das Nebendreieck $(\overline{\alpha}, \beta, \gamma)$ angewendet, giebt alſo eine andere Gleichung:

$$F(a, \overline{b}, \overline{c}, A, \overline{B}, \overline{C}) = o$$

die, wenn ſie nicht identiſch mit der vorigen iſt, eine neue Relation zwiſchen den Seiten und Winkeln des Dreiecks (α, β, γ) ergiebt. Demnach können in jeder Gleichung jede zwei Seiten nebſt den gegenüberliegenden Winkeln (ſie mögen beide in der Gleichung enthalten ſeyn, oder nicht) vertauſcht werden gegen ihre Supplemente.

Wendet man endlich eine allgemeingültige Gleichung auf ein Nebendreieck des Polardreieckes, etwa $\left\{\begin{matrix}\overline{a}, & b, & c\\ \overline{A}, & B, & C\\ \overline{a}, & b, & c\end{matrix}\right\}$ an, ſo erhält man aus $F(a, b, c, A, B, C) = o$ die Gleichung

$$F(\overline{A}, B, C, \overline{a}, b, c) = o.$$

Daraus folgt: Es können in jeder allgemeinen Gleichung zwei Seiten mit den gegenüberliegenden Winkeln vertauſcht werden, indem zugleich die dritte Seite und das Supplement des dritten Winkels, ſo wie der dritte Winkel und das Supplement der dritten Seite mit einander wechſeln.

Wird z. B. in der Gleichung:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}$$

A, B gegen a, b und C, c resp. gegen $\overline{c}, \overline{C}$ vertauscht, so erhält man sogleich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

§. 12.

Aufgabe. Eine allgemeingültige Gleichung zwischen den drei Seiten eines sphärischen Dreieckes und einem Winkel desselben aufzustellen.

Auflösung. Man konstruire eine sphärische Spindel ABCA′ (Fig. 1.) von beliebigem Winkel, deren Kreisebnen sich in dem Kugeldurchmesser AA′ schneiden, dessen Mittelpunkt — zugleich der Mittelpunkt der Kugel — in M sei. In jeder der Ebnen ABA′, ACA′, ziehe man von M aus senkrecht auf den Durchschnitt AA′ die Kugelradien MD, ME; der dadurch gebildete Winkel DME ist der Neigungswinkel der Kreisebenen, also = A d. i. dem Winkel der Spindel, und die Ebene desselben DME steht senkrecht auf AA′, so wie auf beiden Kreisebenen ABA′, ACA′. Wie nun auch das sphärische Dreieck, das als ein Theil der Spindel ABCA′ in A oder A′ einen Winkel hat, beschaffen sein mag, so finden nur zwei Fälle statt: entweder liegen die andern beiden Winkelpunkte B, C auf einer und derselben Seite der Neigungsebene DME, wie Fig. 1. in den Dreiecken ABC, A′BC; oder sie liegen auf entgegengesetzten Seiten derselben, wie Fig. 2. in den Dreiecken ABC, A′BC.

1) Es liege B und C auf derselben Seite von DME (Fig. 1.), oder mit andern Worten: die Seiten AB, AC, oder A′B, A′C seyen gleichartig.

Man ziehe die Kugelradien MB, MC und aus einem beliebigen Punkte c der senkrechten MD eine grade Linie $c\gamma$ parallel mit AA′, die $\perp$ MD sich mit MB in γ schneidet.

Zieht man dann von γ parallel mit MD die Linie γm, die AA′ in m trifft; von m wieder die mit ME parallele Linie $m\beta$ und von β, wo ſie MC ſchneidet, die mit AA′ parallele und zugleich auf ME ſenkrechte L. $b\beta$; ſo iſt $b\beta \parallel c\gamma$, weil jede $\parallel Mm$ iſt. Daher iſt das in einer Ebene liegende Viereck $cb\beta\gamma$ ein Parallelogramm und zwar ein rechtwinkliges, weil $c\gamma, b\beta \parallel Mm$ und $Mm \perp DME$; mithin $c\gamma, b\beta \perp DME$, alſo auch $\perp bc$ iſt. Daraus folgt: $cb = \gamma\beta$. — In den ebnen Dreiecken cMb und $\gamma M\beta$ iſt nun nach dem Fundamentalſatze der ebnen Trigonometrie:

$$cb^2 = Mb^2 + Mc - 2Mb.Mc.\cos cMb; \quad (\mathfrak{A})$$
$$\gamma\beta^2 = M\beta^2 + M\gamma^2 - 2M\beta.M\gamma.\cos\gamma M\beta; \quad (\mathfrak{B}).$$

Zieht man (A) von (B) ab, ſo erhält man, da $cb = \gamma\beta$,

$$0 = (M\beta^2 - Mb^2) + (M\gamma^2 - Mc^2) + 2Mb.Mc.\cos cMb - 2M\beta.M\gamma.\cos\gamma M\beta; \quad (\mathfrak{C}).$$

Aus den an c, b rechtwinkligen Dreiecken $Mc\gamma$, $Mb\beta$ folgt nun:

$$M\beta^2 - Mb^2 = b\beta^2;$$
$$M\gamma^2 - Mc^2 = c\gamma^2 = b\beta^2;$$

daher $(M\beta^2 - Mb^2) + (M\gamma^2 - Mc^2) = 2b\beta^2 = 2b\beta.c\gamma$. Subſtituirt man dieſen Werth $2b\beta.c\gamma$ in (C) und bemerkt, daß der Winkel $cMb = A = A'$ und $\gamma M\beta =$ Bogen BC iſt, ſo erhält man:

$$2b\beta.c\gamma + 2Mb.Mc.\cos A - 2M\beta.M\gamma.\cos BC = 0;$$

und wenn mit $2M\beta.M\gamma$ dividirt wird:

$$\frac{b\beta.c\gamma}{M\beta.M\gamma} + \frac{Mb.Mc}{M\beta.M\gamma}\cos A - \cos BC = 0; \quad (\mathfrak{D}).$$

Die hier entſtandenen Quotienten laſſen ſich nun mittelſt der rechtwinkligen Dreiecke $Mb\beta$, $Mc\gamma$, deren Hypotenuſen $M\beta$, $M\gamma$ ſind, durch die Seiten AB, AC, A′B, A′C der ſphäriſchen Dreiecke ABC, A′BC ausdrücken, nämlich:

$$\frac{b\beta}{M\beta} = \sin bM\beta = \sin EC = \cos AC = -\cos A'C;$$

$$\frac{Mb}{M\beta} = \cos bM\beta = \cos EC = \sin AC = \sin A'C;$$

$\frac{c\gamma}{M\gamma} = \sin c M\gamma = \sin DB = \cos AB = -\cos A'B;$

$\frac{Mc}{M\gamma} = \cos c M\gamma = \cos DB = \sin AB = \sin A'B.$

Diese Werthe in (D) eingesetzt geben:

1) für das Dreieck ABC

$\cos AC . \cos AB + \sin AC . \sin AB . \cos A - \cos BC = 0;$ (E)

2) für das Dreieck A'BC

$\cos A'C . \cos A'B + \sin A'C . \sin A'B . \cos A' - \cos BC = 0;$

dieselbe Gleichung wie in (E).

2) Um die Gültigkeit der Gleichung (E) auch für den Fall, wenn die Winkelpunkte B, C auf entgegengesetzten Seiten der Ebene DME liegen, d. h. wenn die Seiten AB, AC ungleichartig sind, zu erweisen, konstruire man wieder $c\gamma \| AA'$; $cm \| MB$; $m\beta \| ME$ und $b\beta \| AA'$, wodurch wieder $c\gamma \# b\beta$ wird. Zieht man noch cb und $\gamma\beta$, die in einer Ebene liegen und sich in d schneiden, so geben die Dreiecke cMb, $\gamma M\beta$ wie vorher:

$cb^2 = Mb^2 + Mc^2 - 2Mb . Mc . \cos cMb;$ (A)

$\gamma\beta^2 = M\beta^2 + M\gamma^2 - 2M\beta . M\gamma . \cos \gamma M\beta;$ (B).

Die (an c, b rechtwinkligen) Dreiecke $dc\gamma$, $db\beta$ sind kongruent, weil die Seiten $c\gamma$, $b\beta$ nebst den anliegenden Winkeln gleich sind; daher $d\gamma = d\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma$; und $dc = db = \frac{1}{2}bc$. Daher ist:

$\frac{\beta\gamma^2}{4} = d\gamma^2 = cd^2 + c\gamma^2 = \frac{1}{4}cb^2 + c\gamma^2;$ daher

$\beta\gamma^2 = cb^2 + 4c\gamma^2;$ und

$\beta\gamma^2 - cb^2 = 4c\gamma^2.$

Zieht man also die Gleichung (A) von (B) ab, so ist:

$4c\gamma^2 = (M\beta^2 - Mb^2) + (M\gamma^2 - Mc^2) + 2Mb . Mc . \cos cMb - 2M\beta . M\gamma . \cos \gamma M\beta;$ (C).

Nun ist wieder $M\beta^2 - Mb^2 + M\gamma^2 - Mc^2 = b\beta^2 + c\gamma^2 = 2c\gamma^2$. Substituirt man dies in (C), subtrahirt dann auf beiden Seiten $4c\gamma^2$ und dividirt mit 2, so ist:

$0 = -c\gamma^2 + Mb . Mc . \cos cMb - M\beta . M\gamma \cos \gamma M\beta;$

oder $-b\beta . c\gamma + Mb . Mc \cos cMb - M\beta . M\gamma \cos \gamma M\beta = o.$

Daher $-\frac{b\beta . c\gamma}{M\beta . M\gamma} + \frac{Mb . Mc}{M\beta . M\gamma} . \cos cMb - \cos \gamma M\beta = o$; (D).

Nun ist wieder $\frac{b\beta}{M\beta} = \sin bM\beta = \sin EC = -\cos AC$;

$$\frac{c\gamma}{M\gamma} = \sin cM\gamma = \sin DB = \cos AB;$$

$$\frac{Mb}{M\beta} = \cos bM\beta = \cos EC = \sin AC;$$

$$\frac{Mc}{M\gamma} = \cos cM\gamma = \cos DB = \sin AB;$$

und $cMb = A$: $\gamma M\beta = BC$; daher wenn diese Ausdrücke in (D) substituirt werden:

$$\cos AC . \cos AB + \sin AC . \sin AB . \cos A - \cos BC = o$$

wie oben in (E).

Demnach ist diese Gleichung für jedes sphärische Dreieck gültig. Bezeichnen wir die Seiten BC, AC, AB mit a, b, c, so ist die erste Hauptgleichung für die Elemente a, b, c, A

$$\cos b . \cos c + \sin b \sin c . \cos A - \cos a = o$$

oder $$\cos a - \cos b . \cos c - \sin b \sin c . \cos A = o,$$

die zugleich als Fundamentalgleichung für die übrigen angesehen werden kann, indem jene aus dieser sich ableiten lassen. Denn da mit ihr zugleich die Gleichungen für a, b, c, B und a, b, c, C, gegeben sind, (für welche nur a, A mit b, B und mit c, C zu vertauschen ist) so lassen sich aus den drei Gleichungen:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c . \cos A = o$$
$$\cos b - \cos a \cos c - \sin a \sin c . \cos B = o$$
$$\cos c - \cos a \cos b - \sin a \sin b . \cos C = o$$

zwei Stücke des Dreieckes eliminiren und für jede Quaternion der Elemente a, b, c, A, B, C eine Gleichung herleiten.

Zusatz. Die Gleichung:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c . \cos A = o$$

ist in Bezug auf a und A — Stücke, die einander gegenüber liegen — bestimmt; denn sie giebt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c;$$

also sowohl A durch a, b, c; als a durch A, b, c unzweideutig bestimmt; wie denn auch sowohl durch drei Seiten, als durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel das Dreieck bestimmt wird. In Bezug auf b und c aber, d. i. in Bezug auf die Seiten, deren gegenüberliegende Winkel nicht in der Gleichung enthalten sind, läßt sie Zweideutigkeit zu, in Uebereinstimmung mit g. S. §. 41.

Denn z. B. für c ist die Gleichung

$$(\cos A \sin b) \sin c + (\cos b) \cos c = \cos a$$

von der Form $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$,

welche Gleichung, wenn $\gamma \leqq \beta$ ist, nur einen Werth für x zwischen o und π; wenn aber $\gamma > \beta$, entweder zwei Werthe oder keinen giebt, jenachdem α und γ gleicher oder entgegengesetzter Qualität sind. Dies auf die Gleichung

$$(\cos A \sin b) \sin c + (\cos b) \cos c = \cos a$$

angewendet, ergiebt:

1) Wenn $\cos a \leqq \cos b$ ist, (abgesehen von der Qualität) so hat c nur einen Werth; das Dreieck ist also bestimmt. Ist aber $\cos a \leqq \cos b$, so ist a dem Quadranten näher oder eben so nahe, als b und umgekehrt; also durch zwei Seiten a, b und einen Winkel A das Dreieck bestimmt, wenn a nicht entfernter vom Quadranten ist, als b. (g. S. §. 29.)

2) Wenn $\cos a > \cos b$, also a entfernter vom Quadranten ist, als b, so hat c entweder zwei Werthe, oder keinen; also ist das Dreieck entweder zweideutig oder unmöglich und zwar zweideutig, wenn cos a und $\cos A \cdot \sin b$ gleiche Qualität haben, oder — da sin b stets positiv ist — wenn a und A similar sind; unmöglich, wenn a und A dissimilar sind.

Hieraus ergiebt ſich alſo ganz einfach die Theorie der Ambiguität und Similarität. Denn iſt — vorausgeſetzt, daß $\cos a > \cos b$, alſo a von dem Quadranten entfernter als b iſt — das Dreieck unmöglich, ſobald A und a diſſimilar ſind; ſo folgt, daß in jedem Dreiecke die von dem Quadranten entferntere Seite gleichartig mit dem gegenüber liegenden Winkel ſein muß.

Da der dem Quadranten nähere Bogen den größeren Sinus hat, ſo läßt ſich das Geſetz der Zweideutigkeit bei ſphäriſchen Dreiecken ganz analog dem bei ebnen Dreiecken ausdrücken. Nämlich, iſt a, b, A gegeben, ſo findet nur Zweideutigkeit ſtatt:

1) bei ebnen Dreiecken wenn $a < b$ iſt;
2) bei ſphäriſchen .... wenn $\sin a < \sin b$ iſt.

§. 13.

Aufgabe. Eine Gleichung zwiſchen zwei Seiten und den gegenüber liegenden Winkeln aufzuſtellen.

Auflöſung. Eine Gleichung für die Seiten a, b und die Winkel A, B wird das Reſultat der Elimination der Seite c aus den Gleichungen:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A = o \quad (\mathfrak{A})$$
$$\cos b - \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos B = o \quad (\mathfrak{B})$$

ſein, in welchen die Elemente a, b, c, A, B enthalten ſind. Dieſe Elimination läßt ſich indirekt folgendermaßen bewerkſtelligen. Die Gleichung (A) giebt:

$$(\cos a - \cos b \cos c) = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

Erhebt man, um $\sin c$ durch $\cos c$ auszudrücken, beide Theile auf das Quadrat, ſubſtituirt dann $1 - \cos^2 c$ für $\sin^2 c$ und bringt die Gleichung auf Null, ſo erhält man:

$$(\cos^2 b + \cos^2 A \sin^2 b)\cos^2 c - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 a - \cos^2 A \sin^2 b = o,$$

oder, wenn in der Parentheſe $\cos^2 b$, $\cos^2 A$ durch $1 - \sin^2 b$, $1 - \sin^2 A$ ausgedrückt wird:

$$(1 - \sin^2 b \sin^2 A)\cos^2 c - 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 a - \cos^2 A \sin^2 b = 0,$$

endlich die Gleichung mit $(1 - \sin^2 b \sin^2 A)$ dividirt:

$$\cos^2 c - \frac{2\cos a \cdot \cos b}{1 - \sin^2 b \sin^2 A} \cdot \cos c + \frac{\cos^2 a - \cos^2 A \sin^2 b}{1 - \sin^2 b \sin^2 A} = 0; \quad (\mathfrak{C}).$$

Verwechselt man hier a, A mit b, B, so erhält man das Resultat der Gleichung (B) nach denselben Operationen, nämlich:

$$\cos^2 c - \frac{2\cos a \cdot \cos b}{1 - \sin^2 a \cdot \sin^2 B} \cdot \cos c + \frac{\cos^2 b - \cos^2 B \sin^2 a}{1 - \sin^2 a \cdot \sin^2 B} = 0; \quad (\mathfrak{D}).$$

Da die Gleichungen (C) und (D) dieselben Wurzeln ($\cos c$) haben müssen *), so sind sie identisch, daher die Koeffizienten in beiden gleich. Aus der Gleichung:

$$\frac{2\cos a \cos b}{1 - \sin^2 b \sin^2 A} = \frac{2\cos a \cos b}{1 - \sin^2 a \sin^2 B}$$

folgt nun $\sin^2 b \sin^2 A = \sin^2 a \sin^2 B$;

---

*) Daß die Gleichungen (C) und (D) in jedem Falle einerlei Wurzeln enthalten müssen, zeigt folgende Betrachtung. Man bemerke zunächst, daß die Winkel A und B in beiden Gleichungen nur durch die Quadrate ihrer Sinus und Kosinus Einfluß haben auf die Werthe von $\cos c$. Drückt man $\cos^2 A$, $\cos^2 B$ durch $\sin^2 A$, $\sin^2 B$ aus, so hängt $\cos c$ in der Gleichung (C) ab von $\cos a$, $\cos b$, $\sin A$; in (D) von $\cos a$, $\cos b$, $\sin B$. Da zu jedem Sinus ein spitzer und ein stumpfer Winkel gehört, so erleidet $\cos c$ keine Veränderung, wenn A oder B einmal $< \frac{1}{2}\pi$; dann $> \frac{1}{2}\pi$ genommen wird. — Ist nun $\sin b < \sin a$, so ist in (D), wo die bestimmenden Stücke a, b, B sind, das Dreieck zweideutig. Die beiden, den Stücken a, b, B genügenden, Dreiecke seien (Fig. 3.) BCA, BCA', indem $BC = a$; $CA = CA' = b$ und Winkel $CBA = B$ ist. Der Winkel A erhält die Werthe CAB und CA'B, die zu einander Supplemente sind, also gleiche Sinus haben. Die Seite c erhält die Werthe BA, BA', die keine andern, als die durch die Wurzeln der Gleichung (D) bestimmten sein können. Die Gleichung (C) enthält nun die bestimmenden Stücke a, b, A, von denen A zwar nicht in seinem Sinus doch an sich zweideutig ist. Aus diesen Stücken aber ergiebt die Konstruktion dieselben Dreiecke BCA und BCA', wenn man A für das eine Dreieck spitz, für das andere stumpf nimmt. Es erhält also c dieselben Werthe in (C), wie in (D).

Ist $\sin b > \sin a$ so ergiebt sich dasselbe Resultat.

daher $\sin b . \sin A = \sin a . \sin B$;
eine Gleichung für a, b, A, B.

Die Vergleichung der abſoluten Glieder in (C) und (D) ergiebt daſſelbe Reſultat.

Verwechſelt man in dieſer zweiten Hauptgleichung b, B mit c, C, ſo erhält man für a, c, A, C:

$$\sin a . \sin C = \sin c . \sin A,$$

eben ſo für b, c, B, C die Gleichung:

$$\sin b . \sin C = \sin a . \sin B.$$

Alle drei Gleichungen laſſen ſich ſo zuſammenfaſſen:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c};$$

in Worten: die Sinus der Winkel eines ſphäriſchen Dreieckes verhalten ſich, wie die Sinus der gegenüber liegenden Seiten.

Die Analogie dieſes ſehr einfachen Geſetzes mit dem der ebenen Trigonometrie:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

iſt in die Augen fallend.

Zuſ. 1. Da die Gleichung $\sin a . \sin B = \sin b . \sin A$ oder $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ lauter Sinus enthält, ſo iſt ſie zweideutig, welche Ternion aus den Elementen a, b, A, B auch gegeben ſein mag; wiewohl das Dreieck ſelbſt beſtimmt ſein kann. Nach dem §. 12. Zuſ. ausgeſprochenen Geſetze der Zweideutigkeit läßt ſich indeß aus dem Sinus leicht erkennen, ob das Dreieck wirklich zweideutig iſt, oder nicht.

Zuſ. 2. Da die Sinus der Winkel ſich wie die der gegenüberliegenden Seiten verhalten, ſo ſteht derjenigen Seite, welche den größten Sinus hat, auch der mit dem größten Sinus behaftete Winkel gegenüber, oder: der dem Quadranten nächſten Seite ſteht der dem Rechten nächſte Winkel gegenüber. Hieraus ergiebt ſich auch in Rückſicht der Similarität der ſphäriſchen Dreiecke eine nicht unintereſſante Analogie derſelben mit den

ebnen Dreiecken. Wie nämlich in ebnen Dreiecken nur derjenige Winkel, welcher der größten Seite gegenüberstehend den größten Sinus hat, im Allgemeinen sowohl spitz als stumpf sein kann, während die übrigen Winkel immer spitz sind; so kann in sphärischen Dreiecken nur derjenige Winkel, welcher dem Rechten am nächsten ist, dem also die Seite mit dem größten Sinus gegenübersteht, und der selbst unter den Winkeln den größten Sinus hat, sowohl spitz als stumpf, d. i. sowohl gleichartig als ungleichartig mit der gegenüberliegenden Seite seyn, während die anderen Winkel immer mit den gegenüberliegenden Seiten gleichartig sein müssen. In beiderlei Dreiecken ist es also nur der mit dem größten Sinus behaftete (oder dem Rechten nächste) Winkel, der sowohl spitz als stumpf, also in sphärischen Dreiecken sowohl gleichartig als ungleichartig mit der gegenüberliegenden Seite sein kann.

§. 14.

Aufgabe. Eine Gleichung für zwei Seiten und zwei Winkel, unter denen der von jenen eingeschlossene ist, zu finden.

Auflösung. Es seien die Seiten a, b und die Winkel A, C, für welche eine Gleichung gesucht werden soll. Nimmt man die Gleichungen des §. 12.:

$$\cos a - \cos b \cos c - \sin b . \sin c . \cos A = o \quad (\mathfrak{A})$$

$$\cos c - \cos a \cos b - \sin a . \sin b . \cos C = o \quad (\mathfrak{B})$$

in welchen die Elemente a, b, c, A, C enthalten sind, so wird c zu eliminiren seyn, um die geforderte Gleichung zu erhalten. Zu dem Ende substituire man in ($\mathfrak{A}$) für cos c den aus ($\mathfrak{B}$) sich ergebenden Werth $\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$, so wie für sin c den aus $\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$ folgenden Ausdruck $\frac{\sin a . \sin C}{\sin A}$; dies giebt:

$$\cos a - \cos b\,(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) - \frac{\sin a \cdot \sin b \cdot \cos A \sin C}{\sin A} = 0.$$

Löst man die Parentheſe auf und ſetzt für $\cos^2 b$, $\frac{\cos A}{\sin A}$ ſtatt $1 - \sin^2 b$, $\operatorname{cotg} A$, ſo ergiebt ſich:

$\cos a \sin^2 b - \sin a \sin b \cos b \cos C - \sin a \sin b \operatorname{cotg} A \sin C = 0$

und wenn Alles mit $\sin a \sin b$ dividirt wird:

$$\operatorname{cotg} a, \sin b - \cos b \cos C - \operatorname{cotg} A \sin C = 0,$$

die dritte Hauptgleichung für a, b, A, C.

Zu dieſer Gleichung gehören ſechs Quaternionen der Elemente a, b, c, A, B, C.

Zuſatz. Die Gleichung:

$$\operatorname{cotg} a \cdot \sin b - \cos b \cos C - \operatorname{cotg} A \sin C = 0,$$

iſt wieder für a und A — zwei einander gegenüberliegende Stücke des Dreieckes — beſtimmt; für b und C aber, die einander nicht gegenüberſtehen, läßt ſie Zweideutigkeit zu; denn für beide iſt ſie von der Form $\alpha \sin x + \beta \cos x = \gamma$. z. B. für b hat man:

$$(\operatorname{cotg} a) \sin b - (\cos C) \cos b = \operatorname{cotg} A \sin C.$$

Bedingung der Unzweideutigkeit iſt, daß $\operatorname{cotg} A \sin C \leqq \cos C$, oder, wenn man mit $\sin C$ dividirt, daß $\operatorname{cotg} A \leqq \operatorname{cotg} C$, alſo, daß A dem Rechten näher, oder eben ſo nahe, als C ſei. Zweideutigkeit findet ſtatt, wenn $\operatorname{cotg} A \sin C > \cos C$, d. i. wenn A entfernter vom Rechten iſt, als C. Im letztern Falle wird durch die Möglichkeit des Dreieckes wieder die Similarität von A und a bedingt. Dieſe Gleichung ſpricht alſo das Geſetz der Zweideutigkeit und der Similarität eben ſo aus, wie die erſte Hauptgleichung §. 12.

Anmerkung. Dieſe dritte Hauptgleichung ſcheint nicht ſo einfach für das Gedächtniß zu ſein, als die vorhergehenden, da dreierlei Funktionen, Sinus, Koſinus und Kotangente in derſelben vorkommen. Es kommt indeß nur darauf an, daß man die beſtimmten Stücke (a, A) von den zweideutigen (b, C) unterſcheide, was

nach den Sätzen von der Gleichheit und Zweideutigkeit der sphärischen Dreiecke leicht ist. Bestimmt sind hier immer die einander gegenüberliegenden Stücke (vergl. §. 12. Zus.), zweideutig die andern beiden. Demnächst bemerke man 1) daß von jedem bestimmten Stücke nur die Kotangente, von jedem zweideutigen aber der Sinus und Kosinus vorkommt; 2) daß jede Kotangente sich mit einem Sinus zu einem zweigliedrigen Produkte verbindet und zwar mit dem Sinus des gleichartigen Stückes (Seite mit Seite, Winkel mit Winkel); das dritte zweigliedrige Produkt bilden die noch übrigen Kosinus, 3) Um die Gleichung auf Null zu bringen, setze man die Produkte, welche Winkel enthalten, negativ. — Hiernach lassen sich für die sechs Quaternionen:

a b A C
a b B C
a c A B
a c B C
b c A B
b c A C

die zugehörigen Gleichungen sicher und leicht finden. — Legendre giebt für dieselbe Gleichung folgende mnemonische Regel: 1) „Aus „einer Seite a und dem gegenüberliegenden Winkel A; aus einer „andern Seite b und dem anliegenden Winkel C; bilde man die „fiktive Gleichung cotg a cotg A = cotg b cotg C, wobei die kleinen „Buchstaben vor die großen zu setzen sind." 2) „Auf beiden Sei„ten multiplizire man mit sin b . sin C, so hat man:

"cotg a . sin b . cotg A . sin C = cos b . cos C."

3) „In dem ersten Theile sondere man die kleinen Buchstaben von „den großen, indem man vor die letztern das Zeichen — setzt; so „hat man die wahre Gleichung." — Die oben angegebnen Merkmale möchten indeß für das Gedächtniß und für den Gebrauch bequemer sein.

§. 15.

Aufgabe. Eine Gleichung für die drei Winkel und eine Seite des sphärischen Dreieckes zu finden.

Auflösung. Um für A, B, C, a eine Gleichung zu erhalten, braucht man nur die Gleichung für a, b, c, A

$$\cos a - \cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = o$$

auf das Polardreieck anzuwenden; ſo erhält man, indem a, b, c, A reſp. gegen $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{a}$ vertauſcht werden,

$$\cos \overline{A} - \cos \overline{B} \cdot \cos \overline{C} - \sin \overline{B} \cdot \sin \overline{C} \cdot \cos \overline{a} = o;$$

mithin, da $\cos \overline{\alpha} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ und $\sin \overline{\alpha} = \sin \alpha$ iſt,

$$-\cos A - \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a = o,$$

oder $$\cos A + \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a = o,$$

welches die verlangte Gleichung iſt.

Ohne Hülfe des Polardreieckes würde die Gleichung ſich ergeben, wenn man aus den Gleichungen für a, b, A, C und a, b, B, C die Seite b eliminirt. Für a, b, A, C iſt die Gleichung:

$$\operatorname{cotg} a \cdot \sin b - \operatorname{cotg} A \sin C - \cos C \cdot \cos b = o; \quad (\S.\ 14.)$$

oder $$\ldots \frac{\cos a \sin b}{\sin a} - \frac{\cos A \sin C}{\sin A} - \cos C \cdot \cos b = o.$$

Für $\frac{\sin b}{\sin a}$ geſetzt $\frac{\sin B}{\sin A}$ (§. 13.) und Alles mit $\sin A$ multiplizirt giebt:

$$\cos a \sin B - \cos A \sin C - \sin A \cos C \cos b = o; \quad (\mathfrak{A})$$

Verwechſelt man hier a, A mit b, B, ſo erhält man das Reſultat der Gleichung für a, b, B, C nach ähnlichen Operationen, nämlich:

$$\cos b \sin A - \cos B \sin C - \sin B \cos C \cos a = o; \quad (\mathfrak{B})$$

Um $\cos b$ aus ($\mathfrak{A}$) und ($\mathfrak{B}$) zu eliminiren, multiplizire man ($\mathfrak{B}$) mit $\cos C$ und addire ($\mathfrak{B}$) und ($\mathfrak{A}$); ſo iſt:

$$\cos a \sin B - \cos A \sin C - \cos B \sin C \cos C - \cos^2 C \cdot \cos a \cdot \sin B = o;$$

oder das erſte und letzte Glied zuſammengezogen und mit $\sin C$ dividirt:

$$\cos a \sin B \sin C - \cos A - \cos B \cos C = o,$$

oder $$\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \cdot \cos a = o.$$

Zuſ. Für A und a iſt die Gleichung beſtimmt; denn man erhält:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C};$$

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

Für B und C läßt sie Zweideutigkeit zu, deren Gesetz nebst dem der Similarität sich wie §. 12. Zus. findet.

Zur Uebersicht stellen wir sämmtliche Gleichungen für die 15 Quaternionen von a, b, c, A, B, C hier zusammen.

1) für a, b, c, A ..... $\cos a - \cos b \cos c - \sin b \sin c \cos A = o$;
2) — a, b, c, B ..... $\cos b - \cos a \cos c - \sin a \sin c \cos B = o$;
3) — a, b, c, C ..... $\cos c - \cos a \cos b - \sin a \sin b \cos C = o$;

} I.

4) — a, b, A, B ..... $\sin a \sin B - \sin b \sin A$; oder $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}$ oder $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$;
5) — a, c, A, C ..... $\sin a \sin C = \sin c \sin A$;
6) — b, c, B, C ..... $\sin b \sin C = \sin c \sin B$;

} II.

7) — a, b, A, C ..... $\operatorname{cotg} a \sin b - \operatorname{cotg} A \sin C - \cos b \cos C = o$;
8) — a, b, B, C ..... $\operatorname{cotg} b \sin a - \operatorname{cotg} B \sin C - \cos a \cos C = o$;
9) — a, c, A, B ..... $\operatorname{cotg} a \sin c - \operatorname{cotg} A \sin B - \cos c \cos B = o$;
10) — a, c, B, C ..... $\operatorname{cotg} c \sin a - \operatorname{cotg} C \sin B - \cos a \cos B = o$;
11) — b, c, A, B ..... $\operatorname{cotg} b \sin c - \operatorname{cotg} B \sin A - \cos c \cos A = o$;
12) — b, c, A, C ..... $\operatorname{cotg} c \sin b - \operatorname{cotg} C \sin A - \cos b \cos A = o$;

} III.

13) — a, A, B, C ..... $\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a = o$;
14) — b, A, B, C ..... $\cos B + \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b = o$;
15) — c, A, B, C ..... $\cos C + \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = o$;

} IV.

§. 16.

Formeln für rechtwinklige Dreiecke.

Aus den entwickelten vier Hauptgleichungen ergeben sich für rechtwinklige Dreiecke sehr einfache Formeln, die ihres häufigen Gebrauchs wegen hier besonders aufzustellen und zu merken sind. Da in dem rechtwinkligen Dreiecke der rechte Winkel immer gegeben ist, so bedarf es zur Bestimmung des Dreieckes nur noch zweier Stücke; mithin zur Auflösung solcher Dreiecke Gleichungen, welche mit dem Gesuchten nur drei Stücke enthalten, da der rechte Winkel seiner goniometrischen Funktionen wegen wegfällt. Die Zahl der aufzulösenden Fälle, mithin auch der zur Auflösung nöthigen Gleichungen ist der Zahl der aus den Elementen a, b, c, A, B, C, unter denen C der rechte Winkel sei, möglichen Quaternionen, welche C enthalten, gleich; also =10. Diese Verbindungen sind folgende:

a b c C	a c A C	a A B C
a b A C	a c B C	b A B C
a b B C	b c A C	c A B C
	b c B C.	

Die Vertauschung der Seiten, so wie der Winkel, beschränkt sich hier, da C unveränderlich ist, auf die Katheten a, b und deren gegenüberliegende Winkel A, B. Daher bleiben von obigen 10 Verbindungen 6 übrig, als wesentlich verschieden; nämlich:

1) a b c C; 2) a b A C; 3) a c A C; 4) b c A C;
5) a A B C; 6) c A B C;

unter denen aus der 2ten, 3ten, 4ten und 5ten durch Vertauschung der Katheten die übrigen 4 erhalten werden.

Für diese sechs Verbindungen haben wir nun die allgemeinen Gleichungen:

1) $\cos c - \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin C = o$;
2) $\cot g\, a \sin b - \cot g\, A \sin C - \cos b \cos C = o$;
3) $\sin A \sin c = \sin a \sin C$;
4) $\cot g\, c \sin b - \cot g\, C \sin A - \cos b \cos A = o$;

5) $\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a = 0$;

6) $\cos C + \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = 0$.

Ist nun C der rechte Winkel, so wird $\cos C = 0$; $\operatorname{cotg} C = 0$; $\sin C = 1$; daher ergeben sich für das rechtwinklige Dreieck die einfachen Gleichungen:

1) $\cos c - \cos a \cos b = 0$; oder ..... $\cos c = \cos a \cos b$; I.

2) $\operatorname{cotg} a \sin b - \operatorname{cotg} A = 0$; oder ..... $\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b}$; II.

3) $\sin A \sin c = \sin a$; oder ..... $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$; III.

4) $\operatorname{cotg} c \sin b - \cos b \cos A = 0$;

oder ..... $\cos A = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c}$; IV.

5) $\cos A - \sin B \cos a = 0$: oder ..... $\cos A = \sin B \cos a$; V.

6) $\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = 0$;

oder ..... $\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \cos c = 1$; VI.

Zus. 1. 1) Aus $\cos c = \cos a \cos b$ (I.) folgt: Jenachdem zwei Seiten des rechtwinkligen Dreieckes gleichartig oder ungleichartig sind, ist die dritte $< \frac{1}{2}\pi$ oder $> \frac{1}{2}\pi$.

2) Aus $\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b}$ (II.), so wie aus $\cos A = \sin B \cos a$ (V.) folgt, daß jede Kathete mit dem gegenüberliegenden Winkel gleichartig ist.

3) Aus $\cos A = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c}$ folgt:

a) Jenachdem, eine Kathete mit der Hypotenuse gleichartig oder ungleichartig ist, ist der eingeschlossene Winkel spitz oder stumpf;

b) Ist die Hypotenuse mit einem anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig, so ist die an demselben Winkel liegende Kathete im ersten Falle $< \frac{1}{2}\pi$, im andern $> \frac{1}{2}\pi$;

c) Ist eine Kathete mit dem anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig, so ist die Hypotenuse $< \frac{1}{2}\pi$, oder $> \frac{1}{2}\pi$. Diese Sätze lassen sich übrigens aus 1. und 2. herleiten,

4) Aus $\text{tang A tang B} \cdot \cos c = 1$ folgt:

a) Die Hypotenuse ist $< \frac{1}{2}\pi$ oder $> \frac{1}{2}\pi$, jenachdem die anliegenden Winkel gleich- oder ungleichartig sind;

b) Ist die Hypotenuse mit einem anliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig, so ist der andere anliegende Winkel spitz oder stumpf.

Die in 1, 3 und 4 ausgesprochenen Sätze über die Similarität im rechtwinkligen Dreiecke lassen sich in einen Satz zusammenfassen. Versteht man nämlich unter einer Folge zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel, so wie eine Seite mit den anliegenden Winkeln; unter Wechsel aber die drei Seiten eines Dreiecks, so wie die drei Winkel, so kann das Gesetz der Similarität im rechtwinkligen Dreiecke so ausgesprochen werden:

Jenachdem zwei Stücke einer Folge oder eines Wechsels, wozu der rechte Winkel nicht gehört, gleichartig oder ungleichartig sind, ist das dritte $< \frac{1}{2}\pi$, oder $> \frac{1}{2}\pi$.

Zus. 2. Die Gleichung II. ist für b; die Gleichung III. für c und die Gleichung V. für B zweideutig, wie das Dreieck selbst, wenn eine Kathete (a) und der gegenüberliegende Winkel (A) gegeben ist, immer zweideutig ist. (g. S. §. 38 und 41.)

Zus. 3. Bei Vergleichung der Formeln (I.)—(VI.) bemerkt man, daß in drei derselben sich zwei Tangenten finden, nämlich in II, IV, und VI; in den übrigen I, III, V aber nur Sinus, oder Kosinus. Eine völlige Uebereinstimmung in jeder dieser beiden Abtheilungen läßt sich erreichen, wenn man für den Sinus oder Kosinus eines Bogens oder Winkels den Kosinus oder Sinus des Komplementes einführt; wodurch sich auch jede Tangente in eine Kotangente verwandeln läßt. Nehmen wir die Gleichungen I, III, V unter der Form:

$$\cos c = \cos a \cos b \text{ (I.)}; \quad \sin a = \sin A \sin c \text{ (III.)};$$
$$\cos A = \sin B \cos a \text{ (V.)};$$

so ergiebt sich eine genaue Uebereinstimmung derselben, wenn sie so geschrieben werden:

I. $\cos c = \sin a' \sin b'$; III. $\cos a' = \sin A \sin c$;
V. $\cos A = \sin B \sin a'$;

wo a', b' die Komplemente der Katheten a, b bedeuten. Die Einführung von Komplementen betrifft dabei nur und jedesmal die Katheten. Merkwürdiger Weise werden auch die Gleichungen:

$$\sin b = \frac{\text{tang } a}{\text{tang } A} = \text{tang } a . \text{cotg } A \quad \text{(II.)};$$

$$\cos A = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } c} = \text{tang } b . \text{cotg } c \quad \text{(IV.)};$$

$\text{tang } A \text{ tang } B \cos c = 1$; oder $\cos c = \text{cotg } A \text{ cotg } B$ (VI.);

eben dadurch völlig konform, daß für jede Kathete das Komplement derselben gesetzt wird. Denn man erhält:

II. $\cos b' = \text{cotg } a' \text{ cotg } A$; IV. $\cos A = \text{cotg } b' \text{ cotg } c$;
VI. $\cos c = \text{cotg } A \text{ cotg } B$.

So reduziren sich jene sechs Gleichungen auf zwei Formen, indem in jeder der erste Theil ein Kosinus ist; der zweite Theil ist für I, III, V ein Produkt zweier Sinus; für II, IV, VI ein Produkt zweier Kotangenten. Dieser merkwürdigen Uebereinstimmung der Formeln in jeder der beiden Abtheilungen muß eine Uebereinstimmung in der Lage der zugehörigen Stücke entsprechen. In den Gleichungen IV. und VI. bemerkt man sogleich, daß das in dem ersten Theile befindliche Stück (A, c) unmittelbar zwischen den Stücken (b c; A B) des zweiten Theiles liegt, indem alle drei eine Folge in dem oben (Zus. 1.) bezeichneten Sinne bilden; in II. jedoch ist b durch den rechten Winkel von a getrennt. Da indeß die Funktionen des rechten Winkels in den Formeln nicht gegenwärtig sind, so kann derselbe hier ganz weggelassen und die Katheten a, b als unmittelbar, wie die Stücke einer Folge, zusammenhängend angesehen werden. Insofern nun lassen sich die Gleichungen für die Folgen in II, IV, VI in den allgemeinen Ausdruck zusammenfassen:

1) Der Kosinus eines Stückes ist gleich dem

Produkte aus den Kotangenten der (unmittelbar) an demſelben liegenden Stücke.

In den Gleichungen I, III, V findet dies offenbar nicht ſtatt, wenn auch der rechte Winkel bei Seite geſetzt wird. Vielmehr liegen hier die in dem zweiten Theile jeder Gleichung enthaltenen Stücke unmittelbar an einander (im Gegenſatze von II, IV, VI) und machen den Anfang einer Folge, die jedoch unterbrochen wird durch das im erſten Theile der Gleichung enthaltene Stück, welches von jenen beiden getrennt iſt durch einen zwiſchenliegenden Winkel oder eine anliegende Seite. Hieraus ergiebt ſich aber zugleich der allgemeine Ausdruck der Gleichungen I, III, V.

2) Der Koſinus eines Stückes iſt gleich dem Produkte aus den Sinus der von demſelben getrennten Stücke.

Da in den Ternionen der Gleichungen I—VI alle mögliche Lagen je dreier Stücke des rechtwinkligen Dreieckes vorkommen, ſo ſind die möglichen Fälle der Auflöſung rechtwinkliger in den Sätzen (1) und (2) enthalten, bei denen nicht zu vergeſſen iſt, daß ſtatt der Katheten immer deren Komplemente zu ſetzen ſind.

Dies ſind die Neperſchen Regeln, von dem Erfinder der Logarithmen mit dieſen zugleich bekannt gemacht. (Mirifici canonis logarithmorum descriptio, Cap. 4.).

Anmerk. 1. Wenn dieſe Regeln ſo vorgetragen werden:

1) Der Koſinus des mittleren Stückes iſt gleich dem Produkte aus den Kotangenten der anliegenden Stücke;
2) Der Koſinus des mittleren Stückes iſt gleich dem Produkte aus den Sinus der getrennten Stücke —

ſo iſt der Ausdruck „des mittleren" Stückes in (2) unbeſtimmt, weil in den Gleichungen I, III, V die in dem erſten Theile enthaltenen Stücke c, a, A nicht mittlere der zugehörigen Ternion ſein können, wenn die Stücke des Dreieckes — mit Uebergehung des rechten Winkels — für alle Ternionen nach einer und derſelben Richtung fortgezählt werden; was doch die Brauchbarkeit der

Regeln bedingen würde. Dieser Beisatz „mittlere" ist aber auch überflüssig, wenn die Regeln wie oben ausgedrückt werden.

Anmerk. 2. Ein anderes Hülfsmittel, die Formeln für das sphärische rechtwinklige Dreieck im Gedächtniß zu behalten, bietet die Analogie derselben mit denen für das ebne rechtwinklige Dreieck dar. Denn an die Formeln:

$$\sin A = \frac{a}{c};\quad \cos A = \frac{b}{c};\quad \operatorname{tang} A = \frac{a}{b};\quad \cos A = \sin B$$

$$\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B = 1,$$

lassen sich die obigen:

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c};\quad \cos A = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c};\quad \operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b};$$

$$\cos A = \sin B \cdot \cos a;\quad \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \cos c = 1;$$

um so leichter knüpfen, als jene im Grunde nur Definitionen der goniometrischen Funktionen sind und leicht behalten werden.

Die Analogie der Formel $\cos c = \cos a \cos b$ und der für das ebne rechtwinklige Dreieck $c^2 = a^2 + b^2$ zeigt sich, wenn man die Kosinus in derselben durch Sinus oder Tangenten ausdrückt, nach der Formel

$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi};$$

Man erhält dann:

$$\sin^2 c = \sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 a \sin^2 b;$$

$$\operatorname{tang}^2 c = \operatorname{tang}^2 a + \operatorname{tang}^2 b + \operatorname{tang}^2 a \operatorname{tang}^2 b.$$

Auf eine andere Weise erhält man zu der Formel

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$$

die analoge: $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c + b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c - b)$.

Denn es ist $\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$; daher $1 - \cos a = \frac{\cos b - \cos c}{\cos b}$ und

$1 + \cos a = \frac{\cos b + \cos c}{\cos b}$; daher $\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{\cos b - \cos c}{\cos b + \cos c}$;

oder $\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c + b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c - b)$.

§. 17.

Da das Quadrantendreieck das Polardreieck eines rechtwinkligen ist, so sind die Seiten und Winkel des letztern die Supplemente der des Quadrantendreieckes. Daher erhält man aus den für das rechtwinklige Dreieck aufgestellten Formeln

folgende für das Quadrantendreieck, in welchem die Seite c als Quadrant vorausgesetzt wird.

1) $\cos C = -\cos A . \cos B$;

2) $\text{tang}\, a = \frac{\text{tang}\, A}{\sin B}$;

3) $\sin a = \frac{\sin A}{\sin C}$;

4) $\cos a = -\frac{\text{tang}\, B}{\text{tang}\, C}$;

5) $\cos a = \sin b . \cos A$;

6) $\text{tang}\, a\, \text{tang}\, b . \cos C = -1$.

Von der Vertauschung der Seiten ist der Quadrant c ausgeschlossen. Die Vertauschung der Nichtquadranten a, b in den Formeln 2, 3, 4, 5 giebt die übrigen 4 Formeln für die Auflösung der 10 Fälle, welche auch hier möglich sind.

Für die Similarität im Quadrantendreiecke erhält man aus §. 16., Zus. 1., das Gesetz:

Jenachdem zwei Stücke einer Folge oder eines Wechsels, worin der Quadrant sich nicht befindet, gleich- oder ungleichartig sind, ist das dritte Stück $> \frac{1}{2}\pi$ oder $< \frac{1}{2}\pi$.

Allgemeine Auflösung der sphärischen Dreiecke.

§. 18.

Die Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke hat keine Schwierigkeit, da die Formeln für dieselben sehr einfach und für die logarithmische Berechnung bequem sind. Indem diese daher übergangen wird, soll nur noch die Anwendung der vier Hauptgleichungen auf die Auflösung schiefwinkliger Dreiecke rücksichtlich der Zusammenziehung derselben in Faktoren mittelst einzuführender Hülfsgrößen gezeigt werden. Die möglichen Aufgaben bei Auflösung sphärischer Dreiecke lassen sich nach den Ternionen aus den Seiten und Winkeln, durch welche ein Dreieck bestimmt wird, auf sechs Fälle bringen. Es können

nämlich gegeben sein: 1) drei Seiten; 2) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel; 3) eine Seite und die anliegenden Winkel; 4) drei Winkel; 5) zwei Seiten und einer der gegenüberliegenden Winkel; 6) zwei Winkel und eine der gegenüberliegenden Seiten. Daraus entstehen folgende 18 Aufgaben:

	Gegeben ist				Gesucht wird		
1)	a	b	c	. . . . .	A (I)	B (I)	C (I)
2)	a	b	C	. . . . .	A (III)	B (III)	c (I)
3)	A	B	c	. . . . .	a (III)	b (III)	C (IV)
4)	A	B	C	. . . . .	a (IV)	b (IV)	c (IV)
5)	a	b	A	. . . . .	B (II)	C (III)	c (I)
6)	A	B	a	. . . . .	b (II)	c (III)	C (IV)

wo durch I, II, III, IV die Hauptgleichungen angedeutet sind, durch welche das Gesuchte gefunden wird.

Erster Fall.

Gegeben: a, b, c.

Der Winkel A wird durch die Formel gefunden:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}.$$

Der Logarithmen wegen setze man:

$$\cos b = n \sin \varphi; \quad \cos a = n \cos \varphi \sin c;$$

so ist $\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cos b \sin c}{\cos a}$; $n = \frac{\cos b}{\sin \varphi}$; und

$$\cos A = \frac{n(\sin c \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot \cos c)}{\sin b \sin c} = \frac{n \sin (c - \varphi)}{\sin b \sin c}$$

$$= \frac{\operatorname{cotg} b \sin (c - \varphi)}{\sin c \cdot \sin \varphi}.$$

Für φ kann sogleich der kleinste Werth φ' genommen werden. Denn da im Allgemeinen $\varphi = r\pi + \varphi'$ ist, so ist:

$$\sin (c - \varphi) = \sin (c - \varphi' - r\pi) = \sin (c - \varphi') \cos r\pi;$$

und $\sin \varphi = \sin (\varphi' + r\pi) = \sin \varphi' \cdot \cos r\pi$; also:

$\frac{\sin(c-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{\sin(c-\varphi')}{\sin\varphi'}$. Auf dieſelbe Weiſe findet man B und C. Vortheilhafter als dieſe Auflöſung, bei welcher man für einen Winkel ſechsmal, für alle drei Winkel zwölfmal aufſchlagen muß, — ſind die §. 28. für $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\text{tang}\frac{1}{2}A$ entwickelten Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b \sin c}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}};$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}};$$

von denen die letzte mit ſiebenmaligen Aufſchlagen alle drei Winkel giebt.

§. 19.

Zweiter Fall.

Gegeben: a, b, C.

1) Für A erhält man aus der Gleichung

$$\text{cotg}\,a \sin b - \text{cotg}\,A \sin C - \cos b \cos C = 0$$

die Formel

$$\text{cotg}\,A = \frac{\text{cotg}\,a \sin b - \cos C \cos b}{\sin C}.$$

Setzt man hier $\text{cotg}\,a = n\cos\varphi$; $\cos C = n\sin\varphi$; ſo iſt:

$$\text{tang}\,\varphi = \cos C . \text{tang}\,a;\quad n = \frac{\cos C}{\sin\varphi};\quad \text{und}$$

$$\text{cotg}\,A = \frac{n\sin(b-\varphi)}{\sin C} = \frac{\text{cotg}\,C \sin(b-\varphi)}{\sin\varphi};$$

oder $\text{tang}\,A = \frac{\text{tang}\,C . \sin\varphi}{\sin(b-\varphi)}$; wo wieder der kleinſte Werth von φ genommen werden kann.

2) Für B erhält man auf dieſelbe Weiſe

$$\text{tang}\,B = \frac{\text{tang}\,C \sin\psi}{\sin(a-\psi)},\quad \text{indem}\quad \text{tang}\,\psi = \cos C \,\text{tang}\,b.$$

3) Die dritte Seite c wird aus der Gleichung

$$\cos c = \cos C \sin a \sin b + \cos a \cos b$$

gefunden. Man ſetze $\cos C \sin a = n \cos\varphi$; $\cos a = n \sin\varphi$; so iſt $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{cotg} a}{\cos C}$; $n = \frac{\cos a}{\sin\varphi}$; und

$$\cos c = n \sin(b+\varphi) = \frac{\cos a \cdot \sin(b+\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Durch die Formeln von Neper (§. 33.) ſo wie durch die Gauß'ſchen (§. 32.) erhält man auch für dieſen Fall eine bequemere Auflöſung.

§. 20.

Dritter Fall.

Gegeben: A, B, c.

1) Um a zu finden, erhält man aus

$$\operatorname{cotg} a \sin c - \operatorname{cotg} A \cdot \sin B - \cos B \cdot \cos c = 0$$

die Formel $\operatorname{cotg} a = \frac{\operatorname{cotg} A \sin B + \cos c \cos B}{\sin c}$,

in der man $\operatorname{cotg} A = n \cos\varphi$; $\cos c = n \sin\varphi$ ſetzen kann. Dann iſt $\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} A \cdot \cos c$; $n = \frac{\cos c}{\sin\varphi}$

und $\operatorname{cotg} a = \frac{n \sin(B+\varphi)}{\sin c} = \frac{\operatorname{cotg} c \cdot \sin(B+\varphi)}{\sin\varphi}$,

oder $\operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{tang} c \cdot \sin\varphi}{\sin(B+\varphi)}$, wo der kleinſte Werth von φ genommen werden kann.

2) Für b erhält man hieraus durch Verwechſelung

$\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} c \cdot \sin\psi}{\sin(A+\psi)}$, wo $\operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang} B \cos c$.

3) Für C hat man

$$\cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B.$$

Setzt man $\cos c \sin A = n \cos\varphi$; $\cos A = n \sin\varphi$; ſo erhält man

$$\cos C = \frac{\cos A \cdot \sin(B-\varphi)}{\sin\varphi}, \text{ wo } \operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{cotg} A}{\cos c}.$$

Die Neperſchen und die Gauß'ſchen Formeln ſind hier eben ſo vortheilhaft, als im vorigen Falle.

§. 21.

Vierter Fall.

Gegeben: A, B, C.

Für die Seite a hat man die Formel

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Setzt man $\cos A = n \cos\varphi \sin C$; $\cos B = n \sin\varphi$; ſo ergiebt ſich $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos B \sin C}{\cos A}$; $n = \frac{\cos B}{\sin\varphi}$ und

$$\cos a = \frac{n \sin(C+\varphi)}{\sin B \sin C} = \frac{\operatorname{cotg} B \sin(C+\varphi)}{\sin C \sin\varphi}.$$

Eben ſo findet man b und c.

Auch hier kann man ſich der §. 29. aufgeſtellten Formeln

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin B \sin C}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}},$$

mit demſelben Vortheile, wie der ähnlichen im erſten Falle, bedienen.

§. 22.

Fünfter Fall.

Gegeben: a, b, A.

Dieſer und der folgende Fall ſind die zweideutigen Fälle der ſphäriſchen Trigonometrie, weil den gegebnen Stücken zwei verſchiedene Dreiecke entſprechen können, und zwar in dieſem Falle, wenn $\sin a < \sin b$ iſt.

1) Der Winkel B findet ſich nach dem Sinusgeſetze

$$\sin B = \frac{\sin A \cdot \sin b}{\sin a}.$$

Hier iſt nun nach §. 12. Zuſ.

1) wenn $\sin a \gtreqless \sin b$ iſt, B simil. b.

2) wenn $\sin a < \sin b$, B zweideutig; sowohl $< \frac{1}{2}\pi$, als $> \frac{1}{2}\pi$.

2) Der Winkel C wird durch die Gleichung

$$\cot g\, a \sin b - \cot g\, A \sin C - \cos b \cos C = 0;$$

oder $\cot g\, A \sin C + \cos b \cos C = \cot g\, a \,.\, \sin b$, gefunden. Setzt man $\cot g\, A = n \cos \varphi$; $\cos b = n \sin \varphi$; so ist:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\cot g\, A}{\sin b}; \quad n = \frac{\cos b}{\sin \varphi} = \frac{\cot g\, A}{\cos \varphi}; \quad \text{und}$$

$$n \sin (C + \varphi) = \cot g\, a \,.\, \sin b, \quad \text{daher}$$

$$\sin (C + \varphi) = \frac{\cot g\, a \sin b}{n} = \frac{\operatorname{tang} b \sin \varphi}{\operatorname{tang} a}.$$

Wird $(C + \varphi)$ durch ψ bezeichnet, so ist $C = \psi - \varphi$. Da $C > o$ und $< \pi$ seyn muß, so ist nach §. 9. für φ der kleinste Werth φ', für ψ aber der kleinste ψ' oder dessen Supplement $\pi - \psi'$, das für ein negatives ψ' größer, als π wird, zu nehmen. Diese Zweideutigkeit des ψ entscheidet sich nun nach §. 9. und 12. so:

1) Wenn $\sin a \gtreqless \sin b$;

so ist $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$, jenachdem A $\left\{\begin{matrix}\text{simil.}\\ \text{dissim.}\end{matrix}\right\}$ b.

2) Wenn $\sin a < b$; so ist ψ zweideutig.

Es entsteht noch die Frage, welche Werthe von B und C im zweideutigen Falle zu einem und demselben Dreiecke gehören. Die Entscheidung ist: zu dem *größeren* C gehört das *mit* A *gleichartige* B.

Denn es seien (Fig. 4.) ABC und AB′C die beiden Dreiecke, welche aus a, b, A sich konstruiren lassen, und zwar sey AC = b; CB = CB′ = a; CAB = A. Das von C auf AB gefällte Perpendikel CD fällt dann zwischen CB und CB′; daher ist CBA simil. A (g. S. §. 39.) und CB′A dissimil. A; also das größere C, nämlich ACB, zu dem mit A gleichartigen B (CBA) und das kleinere C (ACB′) zu dem mit A ungleichartigen B (CB′A) gehörig.

3) Die Seite c findet sich aus der ersten Hauptgleichung:

$$\cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c = \cos a.$$

Setzt man $\cos A \sin b = n \cos \varphi$; $\cos b = n \sin \varphi$; so wird:

$$\tang \varphi = \frac{\cotg b}{\cos A}; \quad n = \frac{\cos b}{\sin \varphi} \quad \text{und}$$

$$\sin (c + \varphi) = \frac{\cos a \sin \varphi}{\cos b};$$

daher $c = \psi - \varphi$ wenn $c + \varphi = \psi$ gesetzt wird. Von ψ und φ gilt das in 2. bemerkte. Die Entscheidung der Zweideutigkeit des ψ ist hier dieselbe, wie oben.

1) Ist $\sin a \gtreqless \sin b$,

so ist $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$, jenachdem A $\left\{\begin{matrix}\text{simil.}\\ \text{dissimil.}\end{matrix}\right\}$ b ist.

2) Ist $\sin a < \sin b$; so ist ψ zweideutig.

Im letztern Falle gehört das größere c zu dem größeren C, also zu dem mit A gleichartigen B. Sind alle drei Stücke B, C, c zu berechnen, so kann man auch, nachdem B gefunden ist, für C und c die Neperschen Formeln anwenden. Doch möchte, besonders wenn ein zweideutiger Fall vollständig aufgelöst werden sollte, die hier angegebene Auflösung kürzer seyn, da man für beide Dreiecke nur achtmal aufzuschlagen braucht.

§. 23.

Sechster Fall.

Gegeben: A, B, a. Dieser Fall wird ganz wie der vorhergehende aufgelöst.

1) Für die Seite b ist

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A};$$

1) Ist $\sin A \gtreqless \sin B$; so ist b simil. B.

2) Ist $\sin A < \sin B$; so ist b zweideutig $\lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$.

2) Für c wird aus der Gleichung

$$\cotg a \sin c - \cos B \cos c = \cotg A \cdot \sin B,$$

wie im vorigen Falle gefunden

$$c = \psi + \varphi,$$

indem $\text{tang}\,\varphi = \text{tang}\,a \,.\, \cos B$; $\sin\psi = \frac{\text{tang}\,B \,.\, \sin\varphi}{\text{tang}\,A}$ ist.

Man hat hier wieder für φ den kleinsten Werth zu nehmen; für das zweideutige ψ aber ist die Entscheidung:

1) Wenn $\sin A \gtreqless \sin B$;

so ist $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$, jenachdem a $\left\{\begin{matrix}\text{dissim.}\\ \text{simil.}\end{matrix}\right\}$ B.

2) Wenn $\sin A < \sin B$ ist, so ist ψ zweideutig.

Im zweideutigen Falle gehört hier das kleinere c und das mit a gleichartige b zu einem Dreiecke; wie sich durch das Polardreieck aus dem fünften Falle ergiebt.

3) Für C ist die Gleichung

$$\cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A,$$

aus der sich ergiebt: $C = \psi + \varphi$; indem $\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{cotg}\,B}{\cos a}$;

$$\sin\psi = \frac{\cos A \sin\varphi}{\cos B}.$$

1) Ist $\sin A \gtreqless \sin B$;

so ist $\psi \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$; jenachdem a $\left\{\begin{matrix}\text{dissimil.}\\ \text{simil.}\end{matrix}\right\}$ B.

2) Ist $\sin A < \sin B$; so kann $\psi < \frac{1}{2}\pi$, und $> \frac{1}{2}\pi$ sein.

Im zweideutigen Falle gehört das kleinere C zu dem kleineren c und zu dem mit a gleichartigem b.

Gleichungen für fünf und für sechs Stücke des Dreieckes.

§. 24.

Aus der Verbindung der vier Hauptgleichungen, die nur vier Stücke des Dreieckes enthalten, lassen sich für fünf und für alle sechs Stücke desselben ähnliche Gleichungen ableiten, die sowohl an und für sich, als für den trigonometrischen Kalkul überhaupt von Wichtigkeit sind.

I. Für fünf Stücke.

1) Für drei Seiten und zwei Winkel.

Setzt man in der Gleichung für a b A C

$$\cot g\, a \sin b - \cos b \cos C - \cot g\, A \sin C = o;$$

oder $\frac{\cos a \sin b}{\sin a} - \cos b \cos C - \frac{\cos A \sin C}{\sin A} = o;$ (A)

für $\frac{\sin C}{\sin A}$ den Werth $\frac{\sin c}{\sin a}$ ein und multiplizirt Alles mit $\sin a$, so erhält man:

$$\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C - \sin c \cdot \cos A = o; \quad (A.1.)$$

Durch Vertauschung von a, A mit b, B erhält man

$$\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C - \sin c \cdot \cos B = o; \quad (A.2.)$$

2) Für drei Winkel und zwei Seiten.

Wird in (A) für $\frac{\sin b}{\sin a}$ eingesetzt $\frac{\sin B}{\sin A}$ und Alles mit $\sin A$ multiplizirt, so erhält man:

$$\cos a \sin B - \cos b \cos C \sin A - \cos A \sin C = o;$$

oder $\cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b - \sin B \cos a = o;$ (B.1.)

und durch Verwechselung von a, A mit c, C

$$\sin A \cos C + \cos A \sin C \cos b - \sin B \cos c = o; \quad (B.2.)$$

Für die möglichen Verbindungen zu fünfen aus den Elementen a, b, c, A, B, C ergeben sich daher aus (A.1.) durch Vertauschungen folgende Gleichungen:

1) $\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C - \sin c \cos A = o;$
2) $\sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C - \sin c \cos B = o;$
3) $\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B - \sin b \cos A = o;$
4) $\sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B - \sin b \cos C = o;$
5) $\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A - \sin a \cos B = o;$
6) $\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A - \sin a \cos C = o;$

(A)

und aus (B.1.)

1) $\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c - \sin C \cos a = o;$
2) $\sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c - \sin C \cos b = o;$
3) $\cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b - \sin B \cos a = o;$
4) $\sin A \cos C + \cos A \sin C \cos b - \sin B \cos c = o;$
5) $\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a - \sin A \cos b = o;$
6) $\sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a - \sin A \cos c = o;$

(B)

Daß die zweite Reihe (B) aus der ersten (A) durch das Polardreieck erhalten wird, zeigt sich auf den ersten Blick.

§. 25.

Für dieselben fünf Stücke ergiebt sich ein zweites Doppelpaar von Gleichungen aus der ersten und vierten Hauptgleichung.

1) Für a, b, c, A, B.

Man multiplizire die Gleichung

$$\cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c = \cos a$$

mit $\dots\dots \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin a}$,

so erhält man:

$$\sin B (\cos A \sin c + \cotg b \cos c) = \sin A \cotg a; \quad (C)$$

2) Für A, B, C, a, b erhält man aus der vorstehenden eine Gleichung, wenn dieselbe auf das Polardreieck angewendet wird; nämlich:

$$\sin b (\cos a \sin C - \cotg B \cos C) = \sin a \cotg A; \quad (D)$$

oder man multiplizire die vierte Hauptgleichung

$$\cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A$$

mit $\dots\dots\dots \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin A}$.

Durch Verwechselungen erhält man wie oben:

aus (C)

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sin B (\cos A \sin c + \cotg b \cos c) = \sin A \cotg a; \\ 2)\ \sin C (\cos A \sin b + \cotg c \cos b) = \sin A \cotg a; \\ 3)\ \sin A (\cos B \sin c + \cotg a \cos c) = \sin B \cotg b; \\ 4)\ \sin C (\cos B \sin a + \cotg c \cos a) = \sin B \cotg b; \\ 5)\ \sin A (\cos C \sin b + \cotg a \cos b) = \sin C \cotg c; \\ 6)\ \sin B (\cos C \sin a + \cotg b \cos a) = \sin C \cotg c; \end{array}\right\} (C)$$

aus (D)

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sin b (\cos a \sin C - \cotg B \cos C) = \sin a \cotg A; \\ 2)\ \sin c (\cos a \sin B - \cotg C \cos B) = \sin a \cotg A; \\ 3)\ \sin a (\cos b \sin C - \cotg A \cos C) = \sin b \cotg B; \\ 4)\ \sin c (\cos b \sin A - \cotg C \cos A) = \sin b \cotg B; \\ 5)\ \sin a (\cos c \sin B - \cotg A \cos B) = \sin c \cotg C; \\ 6)\ \sin b (\cos c \sin A - \cotg B \cos A) = \sin c \cotg C; \end{array}\right\} (D)$$

Anmerk. Die Gleichungen dieſes §. ſind durch Delambre bekannt geworden, der ſie bei Entwickelung der trigonometriſchen Differenziale anwendet.

§. 26.

II. Für ſechs Stücke.

1) Nimmt man die erſte und die vierte Hauptgleichung

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c;$$
$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C;$$

und multiplizirt die erſte mit $\cos A$, die zweite mit $\cos a$, ſo geben die zweiten Theile die Gleichung

$$\cos^2 A \sin b \sin c + \cos A \cos b \cos c = \cos^2 a \sin B \sin C - \cos a \cos B \cos C;$$

dazu die Gleichung $\sin^2 A \sin b \sin c = \sin^2 a \sin B \sin C$ addirt, welche aus $\sin A \sin b = \sin a \sin B$ und $\sin A \sin c = \sin a \sin C$ folgt, giebt

$$\sin b \sin c + \cos A \cos b \cos c = \sin B \sin C - \cos a \cos B \cos C \quad (E).$$

Wie dieſe Gleichung für b, B und c, C ſymmetriſch iſt, ſo erhält man ſie für b, B und a, A, ſo wie für a, A und c, C durch gehörige Verwechſelungen. Dieſe drei Gleichungen zuſammengeſtellt ſind:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \sin a \sin b + \cos a \cos b \cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B \cos c; \\ &2)\ \sin a \sin c + \cos a \cos c \cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b; \\ &3)\ \sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a; \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

Anmerk. Cagnioli hat dieſe ſehr einfache Formel zuerſt bekannt gemacht.

2) Andere Gleichungen zwiſchen ſechs Stücken erhält man aus den Formeln des §. 24.

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C; \quad (A.\ 1.)$$
$$\sin C \cos b = \sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c; \quad (B.\ 2.)$$

Die Quotienten aus dem erſten Theile der einen und dem zweiten der andern genommen, giebt:

$$\frac{\sin C \cos b}{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B \cos c}{\sin c \cos A}.$$

Zähler und Nenner im ersten Theile durch $\cos b$, im zweiten durch $\cos A$ dividirt, giebt die Gleichung

$$\frac{\sin C}{\tang b \cos a - \cos C \sin a} = \frac{\tang A \cos B + \cos c \sin B}{\sin c} \text{ *)}; \quad \text{(F. 1.)}$$

durch Verwechselung von a, A mit b, B erhält man hiezu:

$$\frac{\sin C}{\tang a \cos b - \cos C \sin b} = \frac{\tang B \cos A + \cos c \sin A}{\sin c}; \quad \text{(F. 2.)}$$

Diese Gleichungen ergeben durch Division:

$$\frac{\tang a \cdot \cos b - \cos C \sin b}{\tang b \cdot \cos a - \cos C \sin a} = \frac{\tang A \cos B + \cos c \sin B}{\tang B \cos A + \cos c \sin A}.$$

Dieselbe Behandlung der Gleichungen

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C; \quad \text{(A. 1.)}$$

$$\cos a \sin C = \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c; \quad \text{(B. 1.)}$$

ergiebt:

$$\frac{\sin C}{\sin b - \tang a \cos b \cos C} = \frac{\sin B + \tang A \cos B \cos c}{\sin c}; \quad \text{(G. 1.)}$$

und

$$\frac{\sin C}{\sin a - \tang b \cos a \cos C} = \frac{\sin A + \tang B \cos A \cos c}{\sin c}; \quad \text{(G. 2.)}$$

Aus §. 24. (A. 1.) und (A. 4.) erhält man auf dieselbe Weise:

$$\frac{\cos C}{\cos a - \sin a \cotg b \cos C} = \frac{\sin a \cotg c - \cos a \cos B}{\cos A}; \quad \text{(H.)}$$

Aus (A. 3.) und (A. 6.) folgt:

$$\frac{\cos C}{\cotg a \sin c - \cos B \cos c} = \frac{\cos c - \cos A \cotg b \sin c}{\cos A}; \quad \text{(I.)}$$

Aus (B. 1.) und (B. 6.):

$$\frac{\cos C}{\cotg A \sin B + \cos c \cos B} = \frac{\cotg C \sin B + \cos a \cos B}{\cos a}.$$

Die Verbindungen dieser Art lassen sich noch vermehren und abändern; sie möchten indeß nur selten Anwendung finden.

*) Ebenfalls von Delambre erwähnt in seiner Astronomie.

§. 27.

3) Setzt man in der Gleichung §. 25. (C. 6.)

$\sin B \cos C \sin a + \sin B \operatorname{cotg} b \cos a = \sin C \operatorname{cotg} c$;

für $\sin B \sin a$ das gleiche $\sin A \sin b$, so erhält sie sechs Stücke, nämlich:

$\sin A \cos C \sin b + \sin B \operatorname{cotg} b \cos a = \sin C \operatorname{cotg} c$; (K. 1.)

die Vertauschung von a, A mit b, B giebt:

$\sin A \operatorname{cotg} a \sin b + \sin B \cos C \sin a = \sin C \operatorname{cotg} c$; (K. 2.)

Aus §. 25. (D. 6.) finden sich durch ähnliche Aenderung die Gleichungen

$\sin a \cos c \sin B - \sin b \cos A \operatorname{cotg} B = \sin c \operatorname{cotg} C$; (L. 1.)

$\sin a \operatorname{cotg} A \cos B - \sin b \cos c \sin A = -\sin c \operatorname{cotg} C$; (L. 2.)

die übrigens das Polardreieck aus (K. 1.) und (K. 2.) ergiebt.

Formeln für halbe Seiten und Winkel, so wie für Summen und Differenzen mehrerer Stücke.

§. 28.

Aus den bisher entwickelten Gleichungen, welche nur Funktionen ganzer und einzelner Stücke des Dreieckes enthalten, lassen sich für Hälften einzelner Stücke und für Summen oder Differenzen zweier und mehrerer Stücke zum Theil sehr elegante Ausdrücke herleiten, die nicht nur für die Auflösung sphärischer Dreiecke vortheilhaft, sondern auch für die sphärische Geometrie überhaupt sehr wichtig sind. Die Entwickelung derselben beginne mit einer Umformung der ersten Hauptgleichung, die auch hier als einzige Fundamentalgleichung betrachtet werden kann, und zwar mit der Aufgabe:

Aus der Formel $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

andere für $\sin \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} A$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ herzuleiten.

1) Für $\sin \frac{1}{2} A$. Man ziehe beide Theile der Gleichung $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ von 1 ab, so erhält man:

$$1-\cos A=1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}.$$

Setzt man $b-c=\psi$; $a=\varphi$; so ist $\cos(b-c)-\cos a=\cos\psi-\cos\varphi=2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ (§. 2, 46.); daher:

$$1-\cos A=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\sin c};$$

daher:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\sin c};\ (\S.2,24.)$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\sin c}};\quad (1.)$$

welche Formel zur Berechnung eines Winkels aus drei Seiten bequem ist. Das Wurzelzeichen ist nur positiv, da $\sin\frac{1}{2}A$ nicht negativ sein kann. Der Sinus selbst ist ohne Zweideutigkeit, da $A<\pi$; $\frac{1}{2}A<\frac{1}{2}\pi$, also $\frac{1}{2}A$ der kleinste zu dem Sinus gehörige Winkel ist.

Durch Verwechselung von A, a mit B, b und mit C, c erhält man für B und C:

$$\sin\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(b+a-c)}{\sin a\sin c}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Man bemerke, daß in den Trinomien $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$, jedesmal die den auszudrückenden Winkel einschließenden Seiten subtraktiv stehen; die demselben gegenüberstehende Seite von der Subtraktion ausgeschlossen bleibt.

2) Für $\cos\frac{1}{2}A$.

Wendet man die Formel für $\sin\frac{1}{2}A$ auf das Nebendreieck

$$\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \overline{a} & \overline{b} & c\\ \overline{A} & \overline{B} & C\end{matrix}\right\}$$ an, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}\overline{A}=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b}-c)\sin\tfrac{1}{2}(\bar{a}+c-\bar{b})}{\sin\bar{b}\sin c}},$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\pi-A)=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(2\pi-a-b-c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin(\pi-b)\sin c}},$$

daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}};\quad(2.)$$

Aus der Formel $\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$, erhält man denselben Ausdruck, wenn zu beiden Theilen 1 addirt wird. Während in der Formel für $\sin\frac{1}{2}A$ die gegenüberstehende Seite a von der Subtraktion ausgeschlossen ist, so steht sie hier allein und nur einmal subtraktiv.

Für B und C ist daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a\sin c}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\sin b}}.$$

3) Da $\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$ ist, so folgt aus (1) und (2)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}};\quad(3.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{2}(b+a-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}};$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{2}(c+a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}}.$$

Zur Berechnung der Winkel aus den Seiten sind diese Formeln besonders vortheilhaft, da sie das Gesuchte durch Tangenten, also schärfer als durch Sinus und Kosinus bestimmen. Zur bequemern Berechnung der Trinomien

$\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(a+c-b)$, $\frac{1}{2}(b+c-a)$ setze man $\frac{1}{2}(a+b+c)=p$; dann ist $\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c$; $\frac{1}{2}(a+c-b)=p-b$; $\frac{1}{2}(c+b-a)=p-a$; also:

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin(p-a)}{\sin b\sin c}};$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\cdot\sin(p-a)}}.$$

4) Da $\sin A=2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$ ist, so erhält man aus (1) und (2)

$$\sin A=\frac{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}{\sin b\sin c}.$$

Die unter dem Wurzelzeichen stehende Größe ändert sich nicht, wenn man die Seiten a, b, c verwechselt.

Bezeichnet man diesen symmetrischen Ausdruck mit g, so ist $\sin A=\frac{2g}{\sin b\sin c}$.

Durch Vertauschung $\sin B=\frac{2g}{\sin a\sin c}$; (4.)

und . . . . . $\sin C=\frac{2g}{\sin a\sin b}$.

Dividirt man diese Gleichungen resp. durch sin a, sin b, sin c, so erhält man:

$$\frac{2g}{\sin a\sin b\sin c}=\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

Indem sich auf diese Weise die zweite Hauptgleichung ergiebt, ist es nicht uninteressant, die Quotienten $\frac{\sin A}{\sin a}$, $\frac{\sin B}{\sin b}$, $\frac{\sin C}{\sin c}$ = dem symmetrischen Ausdrucke $\frac{2g}{\sin a\sin b\sin c}$ zu finden.

Anmerk. Bei ebnen Dreiecken geben die gleichen Quotienten

$$\frac{a}{\sin A},\ \frac{b}{\sin B},\ \frac{c}{\sin C},$$

$$\frac{a.b.c}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$$

den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises. Wie sich dieß bei

sphärischen Dreiecken verhält, wird weiter unten in Betrachtung kommen.

§. 29.

Aus der vierten Hauptgleichung

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

lassen sich für $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$, $\tang\frac{1}{2}a$ ähnliche Formeln herleiten, die indeß aus den schon entwickelten sich einfacher mittelst des Polardreieckes ergeben. Wendet man nämlich die Gleichung:

1) $$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\,\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b\,\sin c}};$$

auf das Polar-Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\bar{a},\ b,\ c\\ \bar{A},\ B,\ C\\ \bar{a},\ b,\ c\end{matrix}\right\}$ an, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\bar{A}+C-B)\,\sin\frac{1}{2}(\bar{A}+B-C)}{\sin B\,\sin C}};$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\pi-a) = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi-A+C-B)\,\sin\frac{1}{2}(\pi-A+B-C)}{\sin B\,\sin C}};$$

daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\,\sin C}}; \quad (1.)$$

Hier steht also der der Seite a gegenüberliegende Winkel A nicht subtraktiv. Für b und c ist daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(B+A-C)}{\sin A\,\sin C}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin A\,\sin B}}.$$

2) Die Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\,\sin\frac{1}{2}(b+c+a)}{\sin b\,\sin c}};$$

auf dasselbe Dreieck ($\bar{a}\ b\ c$) angewendet, giebt:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A)\,\sin\tfrac{1}{2}(B+C+A)}{\sin B\sin C}},$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\pi-a) = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi)\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A+\pi)}{\sin B\,\sin C}}.$$

Nun ist $\sin(\alpha \mp \tfrac{1}{2}\pi) = \mp\cos\alpha$,

daher:

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}}; \quad (2.)$$

Eben so:

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A\sin C}};$$

und $$\sin\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\sin B}}.$$

Da die Summe der Winkel größer als zwei Rechte ist (s. S. §. 24.), so ist $\tfrac{1}{2}(A+B+C) > \tfrac{1}{2}\pi$, also $\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)$ negativ, und $-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)$ positiv. Daß auch die Kosinus von $\tfrac{1}{2}(A+B-C)$, $\tfrac{1}{2}(A+C-B)$, $\tfrac{1}{2}(B+C-A)$ immer positiv sein müssen, geht daraus hervor, daß die Summe zweier Winkel den dritten um weniger als zwei Rechte übertrifft (ib. Zus. 4.)

3) Für die Tangenten der halben Seiten erhält man aus (1) und (2):

$$\tan\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}};$$

$$\tan\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)\cos\tfrac{1}{2}(B+A-C)}};$$

$$\tan\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(C+B-A)\cos\tfrac{1}{2}(C+A-B)}};$$

welche Formeln für die Auflösung des Falles §. 21. vortheilhaft sind. Setzt man auch hier $\tfrac{1}{2}(A+B+C)=P$; so wird $\tfrac{1}{2}(A+B-C)=P-C$; u. s. w. und

$$\tan\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos P\,.\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}},$$

wodurch die numerische Berechnung abgekürzt wird.

4) Das Produkt $2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a$ giebt hier für $\sin a$ einen ähnlichen Ausdruck wie oben für $\sin A$ gefunden wurde; nämlich:

$$\sin a = \frac{2\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}{\sin B\sin C}.$$

Wird die symmetrische Wurzelgröße durch G bezeichnet, so ist $\sin a = \frac{2G}{\sin B\sin C}$. Für b und c erhält man durch Verwechselung:

$$\sin b = \frac{2G}{\sin A\sin C};\quad \sin c = \frac{2G}{\sin A\sin C};$$

daher $\frac{2G}{\sin A\sin B\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$;

folglich $\frac{2G}{\sin A\sin B\sin C} = \frac{\sin a\sin b\sin c}{2g}$; (§. 28, 4.)

oder $4Gg = \sin A\sin B\sin C\sin a\sin b\sin c$.

5) Aus $\sin A = \frac{2g}{\sin b\sin c}$ (§. 28, 4.) und

$\sin a = \frac{2G}{\sin B\sin C}$ folgt:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{g.\sin B\sin C}{G.\sin b\sin c} = \frac{g.\sin^2 A}{G.\sin^2 a}\left(\text{weil } \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\right)$$

und hieraus die bemerkenswerthe Relation

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{g}{G}.$$

§. 30.

Bezeichnet man in den für $\sin\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}B$, $\cos\frac{1}{2}A$ u. s. w. gefundenen Formeln $\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$, $\sqrt{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}$, $\sqrt{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}$, $\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}$ resp. durch t, t', t'', t''' und $\sqrt{\sin a}$, $\sqrt{\sin b}$, $\sqrt{\sin c}$ durch s', s'', s''' so ist:

1) $\sin\frac{1}{2}A = \frac{t''t'''}{s''s'''}$; 3) $\sin\frac{1}{2}C = \frac{t't''}{s's''}$;

2) $\sin\frac{1}{2}B = \frac{t't'''}{s's'''}$; 4) $\cos\frac{1}{2}A = \frac{tt'}{s''s'''}$;

5) $\cos\frac{1}{2}B=\frac{t\,t''}{s'\,s'''}$; 6) $\cos\frac{1}{2}C=\frac{t\,t'''}{s'\,s''}$.

Multiplizirt man 1 und 2, so erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B=\frac{t'\,t''\,t'''}{s'\,s''\,s'''}=\frac{t'\,t''}{s'\,s''}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c};$$

oder $$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}.\quad(I.)$$

Diese Gleichung auf das Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\alpha&\beta&\gamma\\ a&b&c\\ A&B&C\end{matrix}\right\}$ angewendet, giebt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c},$$

d. i. $$\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}A)\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin(\pi-\frac{1}{2}(a+b+c))}{\sin c},$$

daher $$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c};\quad(II.)$$

Wird die Gleichung (I.) auf das Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\alpha&\beta&\gamma\\ a&b&c\\ A&B&C\end{matrix}\right\}$ bezogen, so erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\gamma}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c},$$

und hieraus: $$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin c};\quad(III.)$$

Durch Verwechselung von A, a und B, b in vorstehender Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin c};\quad(IV.)$$

Eben so einfach würde man die Gleichungen II, III, IV durch Multiplikation von 4 und 5; 1 und 5; 2 und 4 erhalten. In (II.) ist klar, daß $\sin\frac{1}{2}(a+b+c)$ positiv, also $(a+b+c)<2\pi$ sein muß. In den übrigen Gleichungen

§. 27.

3) Setzt man in der Gleichung §. 25. (C. 6.)

$\sin B \cos C \sin a + \sin B \operatorname{cotg} b \cos a = \sin C \operatorname{cotg} c$;

für $\sin B \sin a$ das gleiche $\sin A \sin b$, so erhält sie sechs Stücke, nämlich:

$\sin A \cos C \sin b + \sin B \operatorname{cotg} b \cos a = \sin C \operatorname{cotg} c$; (K. 1.)

die Vertauschung von a, A mit b, B giebt:

$\sin A \operatorname{cotg} a \sin b + \sin B \cos C \sin a = \sin C \operatorname{cotg} c$; (K. 2.)

Aus §. 25. (D. 6.) finden sich durch ähnliche Aenderung die Gleichungen

$\sin a \cos c \sin B - \sin b \cos A \operatorname{cotg} B = \sin c \operatorname{cotg} C$; (L. 1.)

$\sin a \operatorname{cotg} A \cos B - \sin b \cos c \sin A = -\sin c \operatorname{cotg} C$; (L. 2.)

die übrigens das Polardreieck aus (K. 1.) und (K. 2.) ergiebt.

Formeln für halbe Seiten und Winkel, so wie für Summen und Differenzen mehrerer Stücke.

§. 28.

Aus den bisher entwickelten Gleichungen, welche nur Funktionen ganzer und einzelner Stücke des Dreieckes enthalten, lassen sich für Hälften einzelner Stücke und für Summen oder Differenzen zweier und mehrerer Stücke zum Theil sehr elegante Ausdrücke herleiten, die nicht nur für die Auflösung sphärischer Dreiecke vortheilhaft, sondern auch für die sphärische Geometrie überhaupt sehr wichtig sind. Die Entwickelung derselben beginne mit einer Umformung der ersten Hauptgleichung, die auch hier als einzige Fundamentalgleichung betrachtet werden kann, und zwar mit der Aufgabe:

Aus der Formel $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

andere für $\sin \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} A$, $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A$ herzuleiten.

1) Für $\sin \frac{1}{2} A$. Man ziehe beide Theile der Gleichung $\cos A = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ von 1 ab, so erhält man:

$$1-\cos A=1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c}.$$

Setzt man $b-c=\psi$; $a=\varphi$; so ist $\cos(b-c)-\cos a=\cos\psi-\cos\varphi=2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ (§. 2, 46.); daher:

$$1-\cos A=\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\sin c};$$

daher:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\sin c};\ (\S.2,24.)$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\sin c}};\quad (1.)$$

welche Formel zur Berechnung eines Winkels aus drei Seiten bequem ist. Das Wurzelzeichen ist nur positiv, da $\sin\frac{1}{2}A$ nicht negativ sein kann. Der Sinus selbst ist ohne Zweideutigkeit, da $A<\pi$; $\frac{1}{2}A<\frac{1}{2}\pi$, also $\frac{1}{2}A$ der kleinste zu dem Sinus gehörige Winkel ist.

Durch Verwechselung von A, a mit B, b und mit C, c erhält man für B und C:

$$\sin\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(b+a-c)}{\sin a\sin c}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Man bemerke, daß in den Trinomien $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$, jedesmal die den auszudrückenden Winkel einschließenden Seiten subtraktiv stehen; die demselben gegenüberstehende Seite von der Subtraktion ausgeschlossen bleibt.

2) Für $\cos\frac{1}{2}A$.

Wendet man die Formel für $\sin\frac{1}{2}A$ auf das Nebendreieck

$$\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \overline{a} & \overline{b} & c\\ \overline{A} & \overline{B} & C\end{matrix}\right\}$$ an, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}\overline{A}=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b}-c)\sin\tfrac{1}{2}(\overline{a}+c-\overline{b})}{\sin\overline{b}\sin c}},$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\pi-A)=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(2\pi-a-b-c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin(\pi-b)\sin c}},$$

daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}};\quad (2.)$$

Aus der Formel $\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$, erhält man denſelben Ausdruck, wenn zu beiden Theilen 1 addirt wird. Während in der Formel für $\sin\frac{1}{2}A$ die gegenüberſtehende Seite a von der Subtraktion ausgeſchloſſen iſt, ſo ſteht ſie hier allein und nur einmal ſubtraktiv.

Für B und C iſt daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a\sin c}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\sin b}}.$$

3) Da $\frac{\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}=\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$ iſt, ſo folgt aus (1) und (2)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}};\quad (3.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{2}(b+a-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)}};$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{2}(c+a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}}.$$

Zur Berechnung der Winkel aus den Seiten ſind dieſe Formeln beſonders vortheilhaft, da ſie das Geſuchte durch Tangenten, alſo ſchärfer als durch Sinus und Koſinus beſtimmen. Zur bequemern Berechnung der Trinomien

$\frac{1}{2}(a+b-c)$, $\frac{1}{2}(a+c-b)$, $\frac{1}{2}(b+c-a)$ ſetze man

$\frac{1}{2}(a+b+c)=p$; dann iſt $\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c$;

$\frac{1}{2}(a+c-b)=p-b$; $\frac{1}{2}(c+b-a)=p-a$; alſo:

daher $$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}. \qquad (B.)$$

3) Addirt man die Gleichungen III. und IV. deſſelben §.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin c},$$

und $$\frac{\cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin a},$$

ſo iſt $$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)+\sin\frac{1}{2}(c-(a-b))}{\sin c}$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c},$$

daher $$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}; \qquad (C.)$$

4) Die Subtraktion giebt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B-\cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)-\sin\frac{1}{2}(c-(a-b))}{\sin c}$$

d. i. $$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}c.\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin c},$$

folglich $$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}. \qquad (D.)$$

Durch dieſelben Verbindungen der Gleichungen I. und II, III und IV des §. 31. gelangt man zu denſelben hier entwickelten, ebenſo eleganten als wichtigen Gleichungen, die unter dem Namen der Gauß'ſchen Formeln bekannt ſind. *)

Zur leichtern Uebertſicht und Vergleichung mögen ſie hier zuſammen geſtellt werden.

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}; \qquad (A.)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}; \qquad (B.)$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}; \qquad (C.)$$

*) Wenigſtens hat Gauß erſt die Wichtigkeit dieſer, von Delambre allerdings früher bemerkten, Formeln gelehrt in dem trefflichen Werke: Theoria motus corporum coelestium. 1809.

rischen Dreiecken verhält, wird weiter unten in Betrachtung men.

§. 29.

Aus der vierten Hauptgleichung

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

lassen sich für $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$, $\tang\frac{1}{2}a$ ähnliche Formeln herleiten, die indeß aus den schon entwickelten sich einfacher mittelst des Polardreieckes ergeben. Wendet man nämlich die Gleichung:

1) $$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \sin c}};$$

auf das Polar-Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\overline{a}, b, c\\ \overline{A}, B, C\\ \overline{a}, b, c\end{matrix}\right\}$ an, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\overline{A}+C-B)\sin\frac{1}{2}(\overline{A}+B-C)}{\sin B \sin C}};$$

oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\pi - a) = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi - A + C - B)\sin\frac{1}{2}(\pi - A + B - C)}{\sin B \sin C}};$$

daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B \sin C}}; \quad (1.)$$

Hier steht also der der Seite a gegenüberliegende Winkel A *nicht* subtraktiv. Für b und c ist daher:

$$\cos\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(B+A-C)}{\sin A \sin C}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin A \sin B}}.$$

2) Die Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(b+c+a)}{\sin b \sin c}};$$

dasselbe Dreieck $(\overline{a}\ b\ c)$ angewendet, giebt:

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A)\,\sin\tfrac{1}{2}(B+C+A)}{\sin B\sin C}},$$

oder:

$$\cos\tfrac{1}{2}(\pi-a) = \sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi)\,\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A+\pi)}{\sin B\,\sin C}}.$$

Nun ist $\sin(\alpha \mp \tfrac{1}{2}\pi) = \mp\cos\alpha$,

daher:

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}}; \quad (2.)$$

Eben so:

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\sin A\sin C}};$$

und $$\sin\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\sin B}}.$$

Da die Summe der Winkel größer als zwei Rechte ist (g. S. §. 24.), so ist $\tfrac{1}{2}(A+B+C) > \tfrac{1}{2}\pi$, also $\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)$ negativ, und $-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)$ positiv. Daß auch die Kosinus von $\tfrac{1}{2}(A+B-C)$, $\tfrac{1}{2}(A+C-B)$, $\tfrac{1}{2}(B+C-A)$ immer positiv sein müssen, geht daraus hervor, daß die Summe zweier Winkel den dritten um weniger als zwei Rechte übertrifft (ib. Zus. 4.)

3) Für die Tangenten der halben Seiten erhält man aus (1) und (2):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}};$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)\cos\tfrac{1}{2}(B+A-C)}};$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\cos\tfrac{1}{2}(C+B-A)\cos\tfrac{1}{2}(C+A-B)}};$$

welche Formeln für die Auflösung des Falles §. 21. vortheilhaft sind. Setzt man auch hier $\tfrac{1}{2}(A+B+C)=P$; so wird $\tfrac{1}{2}(A+B-C)=P-C$; u. s. w. und

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos P\,.\cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}},$$

wodurch die numerische Berechnung abgekürzt wird.

4) Das Produkt $2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a$ giebt hier für $\sin a$ einen ähnlichen Ausdruck wie oben für $\sin A$ gefunden wurde; nämlich:

$$\sin a = \frac{2\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}{\sin B \sin C}.$$

Wird die symmetrische Wurzelgröße durch G bezeichnet, so ist $\sin a = \frac{2G}{\sin B \sin C}$. Für b und c erhält man durch Verwechselung:

$$\sin b = \frac{2G}{\sin A \sin C}; \quad \sin c = \frac{2G}{\sin A \sin C};$$

daher $$\frac{2G}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C};$$

folglich $$\frac{2G}{\sin A \sin B \sin C} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{2g};$$ (§. 28, 4.)

oder $$4Gg = \sin A \sin B \sin C \sin a \sin b \sin c.$$

5) Aus $\sin A = \frac{2g}{\sin b \sin c}$ (§. 28, 4.) und $\sin a = \frac{2G}{\sin B \sin C}$ folgt:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{g \cdot \sin B \sin C}{G \cdot \sin b \sin c} = \frac{g \cdot \sin^2 A}{G \cdot \sin^2 a} \left(\text{weil } \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\right)$$

und hieraus die bemerkenswerthe Relation

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{g}{G}.$$

§. 30.

Bezeichnet man in den für $\sin\frac{1}{2}A$, $\sin\frac{1}{2}B$, $\cos\frac{1}{2}A$ u. s. w. gefundenen Formeln $\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$, $\sqrt{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}$, $\sqrt{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}$, $\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}$ resp. durch t, t', t'', t''' und $\sqrt{\sin a}$, $\sqrt{\sin b}$, $\sqrt{\sin c}$ durch s', s'', s''' so ist:

1) $\sin\frac{1}{2}A = \frac{t''\,t'''}{s''\,s'''}$; 3) $\sin\frac{1}{2}C = \frac{t'\,t''}{s'\,s''}$;

2) $\sin\frac{1}{2}B = \frac{t'\,t'''}{s'\,s'''}$; 4) $\cos\frac{1}{2}A = \frac{t\,t'}{s''\,s'''}$;

5) $\cos\frac{1}{2}B = \frac{t\,t''}{s\,s'''}$; 6) $\cos\frac{1}{2}C = \frac{t\,t'''}{s\,s''}$.

Multiplizirt man 1 und 2, so erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{t'\,t''\,t^{2}}{s'\,s''\,s^{2}} = \frac{t'\,t''}{s\,s'''}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}$$

$$= \sin\tfrac{1}{2}C\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c};$$

oder $$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}. \quad (I.)$$

Diese Gleichung auf das Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma\\ a & b & c\\ A & B & C\end{matrix}\right\}$ angewendet, giebt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\overline{A}\sin\frac{1}{2}\overline{B}}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b}-c)}{\sin c},$$

d. i. $$\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}A)\sin(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin(\pi-\frac{1}{2}(a+b+c))}{\sin c},$$

daher $$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c}; \quad (II.)$$

Wird die Gleichung (I.) auf das Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma\\ a & \overline{b} & \overline{c}\\ A & \overline{B} & \overline{C}\end{matrix}\right\}$ bezogen, so erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}\overline{B}}{\sin\frac{1}{2}\overline{C}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+\overline{b}-\overline{c})}{\sin\overline{c}},$$

und hieraus: $$\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin c}; \quad (III.)$$

Durch Verwechselung von A, a und B, b in vorstehender Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin c}; \quad (IV.)$$

Eben so einfach würde man die Gleichungen II, III, IV durch Multiplikation von 4 und 5; 1 und 5; 2 und 4 erhalten. In (II.) ist klar, daß $\sin\frac{1}{2}(a+b+c)$ positiv, also $(a+b+c)<2\pi$ sein muß. In den übrigen Gleichungen

findet ſich, daß die Summe zweier Seiten größer, als die dritte ſein muß.

Dividirt man (I.) durch (II.), ſo erhält man:

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}A \cdot \text{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}. \quad \text{(V.)}$$

Wird (III.) durch (IV.) dividirt, ſo ergiebt ſich:

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}A}{\text{tang}\frac{1}{2}B} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}; \quad \text{(VI.)}$$

welche Formeln auch aus §. 28, 3. ſogleich hergeleitet werden können. Sie ſind theils bei Auflöſung eines Dreieckes, wenn bereits drei Seiten und ein Winkel bekannt ſind; theils zur Prüfung der gefundenen Werthe nützlich.

Drückt man in (II.) sin c nach §. 29, 4. durch die Winkel aus, ſo erhält man den Perimeter (a + b + c) ſymmetriſch durch die Winkel ausgedrückt, nämlich:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} \quad \text{(VII.)}$$

$$= \frac{G}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}.$$

Dieſelbe Subſtitution in (I.) angewendet, giebt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{G}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}; \quad \text{(VIII.)}$$

§. 31.

Wird die Gleichung (I.) des vorigen §. auf das Polar-Nebendreieck $\left\{\begin{matrix} a\ b\ \overline{c} \\ A\ B\ \overline{C} \\ a\ b\ \overline{c} \end{matrix}\right\}$ angewendet, ſo erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}\overline{c}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B-\overline{C})}{\sin\overline{C}};$$

d. i. $$\frac{\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b}{\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)}{\sin(\pi - C)};$$

daher: $$\frac{\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\sin C}. \quad \text{(I.)}$$

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(c+a-b)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin c} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C-1}{\cos^2\frac{1}{2}C};$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{2-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\sin\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c-1}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-2}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}c-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin C} = \frac{-\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+1}{\sin^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}c};$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(C+B-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin C} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+1}{\sin^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}a}{\sin^2\frac{1}{2}c}.$$

§. 36.

Die Gleichung (5) des vorigen §.:

$$\frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{2\sin^2\frac{1}{2}C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}$$

durch die Gleichung

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c} \quad (\text{§. 30, I.})$$

dividirt, giebt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{4\sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C}; \quad (13.)$$

$$= \frac{1-\sin^2\frac{1}{2}A-\sin^2\frac{1}{2}B-\sin^2\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C}.$$

findet ſich, daß die Summe zweier Seiten größer, als die dritte ſein muß.

Dividirt man (I.) durch (II.), ſo erhält man:

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}A \cdot \text{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}. \quad \text{(V.)}$$

Wird (III.) durch (IV.) dividirt, ſo ergiebt ſich:

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}A}{\text{tang}\frac{1}{2}B} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}; \quad \text{(VI.)}$$

welche Formeln auch aus §. 28, 3. ſogleich hergeleitet werden können. Sie ſind theils bei Auflöſung eines Dreieckes, wenn bereits drei Seiten und ein Winkel bekannt ſind; theils zur Prüfung der gefundenen Werthe nützlich.

Drückt man in (II.) sin c nach §. 29, 4. durch die Winkel aus, ſo erhält man den Perimeter (a + b + c) ſymmetriſch durch die Winkel ausgedrückt, nämlich:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C} \quad \text{(VII.)}$$

$$= \frac{G}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}.$$

Dieſelbe Subſtitution in (I.) angewendet, giebt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{G}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}; \quad \text{(VIII.)}$$

§. 31.

Wird die Gleichung (I.) des vorigen §. auf das Polar-Nebendreieck $\left\{\begin{matrix} a\ b\ \overline{c} \\ A\ B\ \overline{C} \\ a\ b\ \overline{c} \end{matrix}\right\}$ angewendet, ſo erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}\overline{c}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B-\overline{C})}{\sin\overline{C}};$$

d. i. $$\frac{\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b}{\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}c)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)}{\sin(\pi - C)};$$

daher: $$\frac{\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\sin C}. \quad \text{(I.)}$$

Die Gleichung (II.) auf (a b $\overline{c}$) bezogen, giebt:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}\overline{c}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+\overline{C})}{\sin\overline{C}};$$

hieraus folgt:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C}; \quad \text{(II.)}$$

Aus (III.) erhält man eben so:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}\overline{c}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+\overline{C}-B)}{\sin\overline{C}};$$

daher $$\frac{\sin\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin C}; \quad \text{(III.)}$$

und durch Verwechselung:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin C}. \quad \text{(IV.)}$$

Durch Division erhält man aus vorstehenden Gleichungen und zwar aus I. und II.:

$$\text{tang}\frac{1}{2}a \cdot \text{tang}\frac{1}{2}b = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}; \quad \text{(V.)}$$

aus (III.) und (IV.):

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\text{tang}\frac{1}{2}b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}; \quad \text{(VI.)}$$

Setzt man hier in I. für sin C den Werth $\frac{2g}{\sin a \cdot \sin b}$ (§. 28, 4.), so erhält man durch die Seiten symmetrisch ausgedrückt:

$$-\cos\frac{1}{2}(A+B+C) = \frac{g}{2\cos\frac{1}{2}a \cdot \cos\frac{1}{2}b \cdot \cos\frac{1}{2}c}.$$

In II. giebt dieselbe Substitution und Reduktion:

$$\cos\frac{1}{2}(A+B-C) = \frac{g}{2\sin\frac{1}{2}a \cdot \sin\frac{1}{2}b \cdot \cos\frac{1}{2}c}.$$

Wie in (VI.) $\frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\text{tang}\frac{1}{2}b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}$ ist,

so ist auch $\frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\text{tang}\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A-C)}$

und . . $\frac{\text{tang}\frac{1}{2}b}{\text{tang}\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$.

Hieraus folgt:

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(C+A-B)} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)} \quad \text{(VII.)}$$

eine Relation, die an das Sinusgesetz $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$ erinnert.

Aus $\frac{\text{tang}\frac{1}{2}A}{\text{tang}\frac{1}{2}B} = \frac{\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)} = \frac{\text{cotg}\frac{1}{2}B}{\text{cotg}\frac{1}{2}A}$ (§. 30, VI.)

folgt eine ähnliche:

$$\frac{\text{cotg}\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)} = \frac{\text{cotg}\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)} = \frac{\text{cotg}\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}.$$

§. 32.

1) Addirt man die Gleichungen I. und II. des §. 30, nämlich: $\frac{\sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}$

und $\frac{\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin c}$,

so erhält man:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)+\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}.$$

Der zweite Theil zieht sich nach der Formel

$\sin\varphi+\sin\psi = 2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ zusammen in

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c}{\sin c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}c}{2\sin\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Daher ist:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}. \quad \text{(A.)}$$

2) Subtrahirt man dieselben Gleichungen und zwar I. von II., so ergiebt sich:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B-\sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)-\sin(a+b-c)}{\sin c}$$

d. i. . . . . $\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b).\sin\frac{1}{2}c}{\sin c}$,

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos c}{\sin\tfrac{1}{2}C}; \quad (30.)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(c+b-a) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos c}{\cos\tfrac{1}{2}C}; \quad (31.)$$

und durch Verwechselung:

$$\cos\tfrac{1}{2}(c+a-b) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos c}{\cos\tfrac{1}{2}C}. \quad (32.)$$

Dividirt man obige Gleichung (25.)

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C}{\cos\tfrac{1}{2}c}$$

durch $-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\,.\sin C}{\cos\tfrac{1}{2}c}$ (§. 31, I.)

so erhält man:

$$-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C}{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin C},$$

und wenn man den zweiten Theil durch $\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b$ abkürzt:

$$-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}. \quad (33.)$$

Auf das Nebendreieck $(\alpha\,\beta\,\overline{\gamma})$ bezogen, giebt diese Gleichung:

$$-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\overline{A}+\overline{B}+C) = \frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\overline{a}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\overline{b} + \cos C}{\sin C}.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}; \quad (34.)$$

Ebenso erhält man durch $(\overline{\alpha}\,\beta\,\gamma)$ aus (33.):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C+B-A) = \frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b - \cos C}{\sin C}; \quad (35.)$$

durch Verwechselung:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(C+A-B) = \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\,.\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b - \cos C}{\sin C}; \quad (36.)$$

Das Polar-Nebendreieck $(a\,b\,\overline{c})$ giebt aus (34.):

$$-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B - \cos c}{\sin c}; \quad (37.)$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}; \qquad (D.)$$

§. 33.

An die Gauß'ſchen Formeln ſchließen ſich die Neperſchen Analogien*), die für die Auflöſung der Dreiecke ſehr vortheilhaft ſind. Dividirt man (A) durch (B), ſo erhält man:

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{tang}\frac{1}{2}c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}. \qquad (I.)$$

Wird (D) durch (C) dividirt, ſo erhält man:

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{tang}\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}. \qquad (II.)$$

Das Polar-Nebendreieck $(a, b, \bar{c})$ giebt aus (I.) und (II.):

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{cotg}\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}; \qquad (III.)$$

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{cotg}\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}; \qquad (IV.)$$

die man durch Diviſion von (C) durch (B) und (D) durch (A) erhalten haben würde.

Mit dieſen Neperſchen Formeln laſſen ſich die Fälle, wenn zwei Seiten und der eingeſchloſſene Winkel, und wenn eine Seite mit den anliegenden Winkeln gegeben ſind, ſehr bequem auflöſen. In dem erſtern Falle, wenn gegeben iſt a, b, C, erhält man aus (III.) und (IV.):

$$\text{tang}\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \text{cotg}\frac{1}{2}C;$$

$$\text{tang}\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} \cdot \text{cotg}\frac{1}{2}C;$$

und ſomit durch fünfmaliges Aufſchlagen die Winkel A und B auf einmal. Für die dritte Seite c erhält man aus (II.)

$$\text{tang}\frac{1}{2}c = \text{tang}\frac{1}{2}(a-b)\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)};$$

*) Von Neper ſchon 1614 in ſeiner Mirifici canonis logarithmorum descriptio bekannt gemacht.

daher

$$2\cos^2\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)=-\left(\frac{1-\cos^2\tfrac{1}{2}a-\cos^2\tfrac{1}{2}b-\cos^2\tfrac{1}{2}c-2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}\right)$$

$$=\frac{4\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)\cos\tfrac{1}{4}(a+c-b)\cos\tfrac{1}{4}(c+b-a)}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},$$

also:

$$\cos\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)=$$

$$\sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)\cos\tfrac{1}{4}(a+c-b)\cos\tfrac{1}{4}(b+c-a)}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}, \quad (42.)$$

Aus dieſer Gleichung ergiebt das Nebendreieck $(\alpha\,\beta\,\overline{\gamma})$:

$$\sin\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)=$$

$$\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)\cos\tfrac{1}{4}(c+b-a)\cos\tfrac{1}{4}(c+a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (43.)$$

Auf die Gleichung (41.) angewendet, giebt daſſelbe Nebendreieck:

$$\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)=$$

$$\sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{4}(c+a-b)}{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (44.)$$

Durch Verwechſelung erhält man aus (43.) und (44.) die entſprechenden Formeln für den Sinus und Koſinus von $\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)$ und $\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)$.

Die Diviſion der Gleichung (41.) durch (42.) ergiebt die ſehr elegante Formel:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)=$$

$$\sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(c+b-a)};^{*}) \quad (45.)$$

Dividirt man (43.) durch (44.), ſo erhält man eine ähnliche:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)$$

$$=\sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}(c+a-b)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}(c+b-a)}$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(c+b-a)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(c+a-b)}}. \quad (46.)$$

*) L'Huilier iſt der Erfinder derſelben.

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cot g\frac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cot g\frac{1}{2}c; \quad (V.)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\cot g\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\tan g\frac{1}{2}c;^{*}) \quad (VI.)$$

§. 34.

Kombinirt man die Gauß'schen Formeln durch Multiplikation je zweier, und zwar

1) (A) und (B), so erhält man:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)\cdot\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin^2\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin c},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des ersten Theils mit 2 multiplizirt und nach §. 2, 45 und 24 verwandelt:

$$\frac{\cos A+\cos B}{1-\cos C}=\frac{\sin(a+b)}{\sin c}. \quad (1.)$$

Dieselben Gleichungen erhält man auch sehr einfach durch Addition der Gleichungen (A. 1.) und (A. 2.) des §. 24.

2) Multiplizirt man (C) und (D), so erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos^2\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c\cdot\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\sin(a-b)}{\sin c};$$

der erste Theil nach §. 2, 46 und 25 verwandelt, giebt:

$$\frac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}=\frac{\sin(a-b)}{\sin c}. \quad (2.)$$

Die Subtraktion der oben angeführten Gleichungen (A. 1.) und (A. 2.) giebt dasselbe Resultat, so wie auch die Anwendung der Gleichung (1.) auf das Nebendreieck $(\alpha\,\beta\,\gamma)$.

---

*) Die zweite dieser Formeln ist zuerst von Delambre, die erste von A. Burg (Handbuch der geradlin. und sphärischen Trigon. 1826.) bemerkt worden.

Ebenso folgt aus (51.) und (52.):

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c) =$$

$$\sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)}$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)}}; \quad (54.)$$

§. 39.

Multiplizirt man die Gleichung (41.) des vorigen §. mit (42.), so ergiebt sich:

$$\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi) =$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}c}\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{2}(c+a-b)}{\sin a\sin b}}.$$

Nun ist:

$$\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{2}(c+a-b)}{\sin a\sin b}} = \sin\tfrac{1}{2}C \quad (\S.\ 28,\ 1.);$$

daher, wenn man dies substituirt und beide Theile der Gleichung mit $\sin\frac{1}{2}C$ dividirt:

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\sin\tfrac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}c}; \quad (55.)$$

Durch Multiplikation von (41.) mit (44.) ergiebt sich:

$$\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi) =$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{4}(c+a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}c}\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\sin a\sin b}};$$

$$=\frac{\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{4}(c+a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}c}\cdot\cos\tfrac{1}{2}C; \quad (\S.\ 28,\ 2.)$$

also:

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\cos\tfrac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)\sin\tfrac{1}{4}(c+a-b)}{\cos\tfrac{1}{2}c}. \quad (56.)$$

Die Gleichung (2.) des vorigen §. ebenso behandelt,

$$\frac{\cos B - \cos A}{1+\cos C} + 1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin c} + 1;$$

hieraus: $\frac{-\cos A + \cos B + \cos C + 1}{1+\cos C} = \frac{\sin(a-b)+\sin c}{\sin c}$,

daher:

$$\frac{-\cos A+\cos B+\cos C+1}{2\cos^2\frac{1}{2}C} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(c+a-b)\cos\frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin c}. \quad (7.)$$

4) Durch Verwechselung von A, a mit B, b ergiebt sich hieraus das Resultat der Subtraktion:

$$\frac{\cos A-\cos B+\cos C+1}{2\cos^2\frac{1}{2}C} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(c+b-a)\cos\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin c}. \quad (8.)$$

5) Die Gleichungen 6, 5, 8 nach der Reihe auf das Polar-Nebendreieck $(a, b, \bar{c})$ bezogen, geben folgende:

$$\frac{\cos a+\cos b+\cos c+1}{2\cos^2\frac{1}{2}c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C}; \quad (9.)$$

$$\frac{\cos a+\cos b-\cos c-1}{2\cos^2\frac{1}{2}c} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\sin\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C}; \quad (10.)$$

$$\frac{\cos a-\cos b-\cos c+1}{2\sin^2\frac{1}{2}c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(C+B-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin C}; \quad (11.)$$

und durch Verwechselung von a, A mit b, B:

$$\frac{-\cos a+\cos b-\cos c+1}{2\sin^2\frac{1}{2}c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin C}; \quad (12.)$$

Drückt man in den Gleichungen (5) — (12) jeden Kosinus des ersten Theils nach §. 2, 21. aus, so erhält man:

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C-2}{\sin^2\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{1-\sin^2\frac{1}{2}A-\sin^2\frac{1}{2}B-\sin^2\frac{1}{2}C}{\sin^2\frac{1}{2}C};$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\sin^2\frac{1}{2}C-1}{\sin^2\frac{1}{2}C};$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(c+a-b)\cos\frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin c} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C-1}{\cos^2\frac{1}{2}C};$$

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(c+a-b)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin c} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C-1}{\cos^2\frac{1}{2}C};$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{2-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\sin\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin C} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c-1}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-2}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}c-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b}{\cos^2\frac{1}{2}c};$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin C} = \frac{-\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+1}{\sin^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}c};$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(C+B-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin C} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+1}{\sin^2\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}a}{\sin^2\frac{1}{2}c}.$$

§. 36.

Die Gleichung (5) des vorigen §.:

$$\frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{2\sin^2\frac{1}{2}C} = \frac{2\cos\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c}$$

durch die Gleichung

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin c} \quad (\text{§. 30, I.})$$

dividirt, giebt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\cos A+\cos B+\cos C-1}{4\sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C}; \quad (13.)$$

$$= \frac{1-\sin^2\frac{1}{2}A-\sin^2\frac{1}{2}B-\sin^2\frac{1}{2}C}{2\sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C}.$$

Nebendreieck $(\alpha\ \beta\ \overline{\gamma})$ folgt hieraus:

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\frac{\cos A+\cos B-\cos C+1}{4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C};$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\sin^2\frac{1}{2}C-1}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}. \quad (14.)$$

aus durch Verwechselung:

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\frac{\cos A-\cos B+\cos C+1}{4\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} \quad (15.)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}A+\sin^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C-1}{2\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(c+b-a)=\frac{-\cos A+\cos B+\cos C+1}{4\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}; \quad (16.)$$

$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}A+\cos^2\frac{1}{2}B+\cos^2\frac{1}{2}C-1}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

Aus (13) und (14) erhält man durch Anwendung des Polar-Nebendreiecks $(a\ b\ \overline{c})$:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\cos a+\cos b+\cos c+1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}; \quad (17.)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{-\cos a-\cos b+\cos c+1}{4\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}; \quad (18.)$$

$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Hieraus durch Vertauschung:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C-B)=\frac{-\cos a+\cos b-\cos c+1}{4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}; \quad (19.)$$

$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{2\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(C+B-A)=\frac{\cos a-\cos b-\cos c+1}{4\cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c}; \quad (20.)$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c}.$$

indem für $(A+B+C-\pi)$ sogleich T, für $A+B+C$ aber $T+\pi$ gesetzt werden kann.

Aus der Gleichung (§. 31, II.)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)}{\sin C},$$

erhält man zunächst:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \frac{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin C}{\cos\frac{1}{2}c}, \quad (A.)$$

welche Formel Aehnlichkeit mit der planimetrischen

$$\tfrac{1}{2}T = \tfrac{1}{2}a\,.\,\tfrac{1}{2}b\,.\,\sin C$$

hat, in welche sie sich auch verwandelt, wenn die Seiten des sphärischen Dreieckes unendlich klein werden.

Setzt man für $\sin C$ den Werth $\frac{2g}{\sin a \sin b}$, so erhält man nach gehöriger Reduktion den Ausdruck:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \quad (B.)$$

welcher dieselbe Analogie mit der Tartalea'schen Formel

$$T = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\tfrac{1}{2}(a+b-c)\tfrac{1}{2}(a+c-b)\tfrac{1}{2}(c+b-a)}$$

zeigt. Bequem zur logarithmischen Berechnung ist die Formel (B) allerdings. Da indeß $\frac{1}{2}T < \frac{1}{2}\pi$ und $> \frac{1}{2}\pi$ sein kann, so ist sie zweideutig; daher die weiter unten (G) angeführte ungleich einfachere Formel von L'Huilier ihr schon deshalb entschieden vorzuziehen.

Aus §. 36. erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}T = \frac{\cos a+\cos b+\cos c+1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{2-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \quad (C.)$$

Hieraus läßt sich eine Entscheidung der in (B) vorhandenen Zweideutigkeit herleiten. Ist nämlich $T<\pi$, so ist $\cos\frac{1}{2}T$ positiv, daher muß $\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c>1$ sein. Ist $T>\pi$, so ist $\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c<1$. Für $T=\pi$ ist $\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c=1$.

$$A+B+C)$$

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos a.\cos b+\sin a.\sin b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a\ \cos\frac{1}{2}b\ \cos\frac{1}{2}c};$$

$$=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)+\sin a.\sin b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c};$$

$$=\frac{4\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b+4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};$$

daher, wenn durch $4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$ Zähler und Nenner des zweiten Theils dividirt werden:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}. \quad (25.)$$

Das Nebendreieck $(\alpha\ \beta\ \overline{\gamma})$ giebt hieraus:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\overline{A}+\overline{B}+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}\overline{a}\cos\frac{1}{2}\overline{b}+\sin\frac{1}{2}\overline{a}\sin\frac{1}{2}\overline{b}\cos C}{\cos\frac{1}{2}c},$$

d. i.

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}. \quad (26.)$$

Das Nebendreieck $(\overline{\alpha}\ \beta\ \gamma)$ giebt aus (25.):

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+\overline{B}+\overline{C})=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\overline{b}+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}\overline{b}\cos\overline{C}}{\cos\frac{1}{2}\overline{c}},$$

daher:

$$\sin\tfrac{1}{2}(C+B-A)=\frac{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b-\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos C}{\sin\frac{1}{2}c}; \quad (27.)$$

und hieraus folgt durch Verwechselung:

$$\sin\tfrac{1}{2}(C+A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\sin\frac{1}{2}c}. \quad (28.)$$

Aus (26.) erhält man durch das Polar-Nebendreieck $(a\ b\ \overline{c})$:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b-\overline{c})=\frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\overline{c}}{\cos\frac{1}{2}\overline{C}};$$

daher:

$$-\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\frac{\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B-\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos c}{\sin\frac{1}{2}C}; \quad (29.)$$

Ebenso folgt aus (25.) und (28.):

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos c}{\sin\tfrac{1}{2}C}; \quad (30.)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(c+b-a) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B + \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos c}{\cos\tfrac{1}{2}C}; \quad (31.)$$

und durch Verwechselung:

$$\cos\tfrac{1}{2}(c+a-b) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos c}{\cos\tfrac{1}{2}C}. \quad (32.)$$

Dividirt man obige Gleichung (25.)

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C}{\cos\tfrac{1}{2}c}$$

durch $-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\,.\sin C}{\cos\tfrac{1}{2}c}$ (§. 31, I.)

so erhält man:

$$-\tang\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C}{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin C},$$

und wenn man den zweiten Theil durch $\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b$ abkürzt:

$$-\tang\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cotg\tfrac{1}{2}a\cotg\tfrac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}. \quad (33.)$$

Auf das Nebendreieck $(\alpha\,\beta\,\overline{\gamma})$ bezogen, giebt diese Gleichung:

$$-\tang\tfrac{1}{2}(\overline{A}+\overline{B}+C) = \frac{\cotg\tfrac{1}{2}\overline{a}\cotg\tfrac{1}{2}\overline{b} + \cos C}{\sin C}.$$

Daraus folgt:

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\tang\tfrac{1}{2}a\,\tang\tfrac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}; \quad (34.)$$

Ebenso erhält man durch $(\overline{\alpha}\,\beta\,\gamma)$ aus (33.):

$$\tang\tfrac{1}{2}(C+B-A) = \frac{\cotg\tfrac{1}{2}a\,.\tang\tfrac{1}{2}b - \cos C}{\sin C}; \quad (35.)$$

durch Verwechselung:

$$\tang\tfrac{1}{2}(C+A-B) = \frac{\tang\tfrac{1}{2}a\,.\cotg\tfrac{1}{2}b - \cos C}{\sin C}; \quad (36.)$$

Das Polar-Nebendreieck $(a\,b\,\overline{c})$ giebt aus (34.):

$$-\cotg\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\tang\tfrac{1}{2}A\,.\tang\tfrac{1}{2}B - \cos c}{\sin c}; \quad (37.)$$

.):

$$\cot g\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\frac{\cot g\tfrac{1}{2}A\cot g\tfrac{1}{2}B-\cos c}{\sin c};\qquad(38.)$$

aus (36.):

$$\cot g\tfrac{1}{2}(c+b-a)=\frac{\tan g\tfrac{1}{2}A\,.\cot g\tfrac{1}{2}B+\cos c}{\sin c};\qquad(39.)$$

aus (35.), oder wenn man hier a, A mit b, B verwechselt:

$$\cot g\tfrac{1}{2}(c+a-b)=\frac{\cot g\tfrac{1}{2}A.\tan g\tfrac{1}{2}B+\cos c}{\sin c};\qquad(40.)$$

§. 38.

Die Formeln des §. 36. laſſen ſich mittelſt der §. 4. bemerkten Formeln in ſehr elegante Ausdrücke umwandeln, die hier noch aufgeſtellt werden ſollen.

Schreibt man in der Gleichung

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c-1}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}\quad(\S.\,36,17.)$$

$\cos\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)$ für $\sin\frac{1}{2}(A+B+C)$ ſo iſt

$$1-\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi)=1-\frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c-1}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c};$$

daher:

$$2\sin^2\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)=$$
$$\frac{1-\cos^2\tfrac{1}{2}a-\cos^2\tfrac{1}{2}b-\cos^2\tfrac{1}{2}c+2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}.$$

Zieht man den zweiten Theil zuſammen, nach §. 4, 1., ſo erhält man:

$$2\sin^2\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)=$$
$$\frac{4\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c};$$

daher:

$$\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)=$$
$$\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}.\qquad(41.)$$

Ferner iſt

$$1+\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi)=1+\frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c-1}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c};$$

$(\alpha\bar{\beta}\gamma)$, $(\alpha\beta\bar{\gamma})$; ferner mit T', T'', T''' die Flächenräume derſelben; ſo iſt

$$P' = a + \bar{b} + \bar{c} = 2\pi - (c + b - a).$$ Eben ſo

$$P'' = 2\pi - (a + c - b);$$
$$P''' = 2\pi - (a + b - c).$$

Ferner iſt $$T' = A + \bar{B} + \bar{C} - \pi = 2\pi - (C + B - A + \pi);$$
$$= \pi - (C + B - A);$$
$$T'' = 2\pi - (A + C - B + \pi) = \pi - (A + C - B);$$
$$T''' = 2\pi - (A + B - C + \pi) = \pi - (A + B - C).$$

Subſtituirt man dieſe Ausdrücke in der Formel

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}}{\sin b \sin c}$$

ſo erhält man:

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}P \cdot \sin\frac{1}{2}P' \sin\frac{1}{2}P'' \sin\frac{1}{2}P'''}}{\sin b \sin c}.$$

Die Formel $\sin a' = \frac{2G}{\sin B \sin C}$ (§. 29.) verwandelt ſich dann in folgende:

$$\sin a = \frac{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}T \sin\frac{1}{2}T' \sin\frac{1}{2}T'' \sin\frac{1}{2}T'''}}{\sin B \sin C}.$$

Die §. 29. bemerkte Relation $\frac{g}{G} = \frac{\sin a}{\sin A}$ erhält man unter der Form

$$\frac{\sin\frac{1}{2}P \sin\frac{1}{2}P' \sin\frac{1}{2}P'' \sin\frac{1}{2}P'''}{\sin\frac{1}{2}T \sin\frac{1}{2}T' \sin\frac{1}{2}T'' \sin\frac{1}{2}T'''} = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 A}.$$

Aus der Gleichung

$$\tang\tfrac{1}{4}(A + B + C - \pi)\tang\tfrac{1}{4}(A + B - C + \pi) =$$
$$\tang\tfrac{1}{2}(a + b + c)\tang\tfrac{1}{2}(a + b - c)$$

erhält man:

$$\tang\tfrac{1}{4}T \cdot \cotg\tfrac{1}{4}T''' = \tang\tfrac{1}{4}P \cdot \cotg\tfrac{1}{4}P''',$$

oder . . . . . $\frac{\tang\frac{1}{4}T}{\tang\frac{1}{4}T'''} = \frac{\tang\frac{1}{4}P}{\tang\frac{1}{4}P'''}$.

Es findet alſo zwiſchen den Flächenräumen und Umfängen zweier Dreiecke, die unmittelbar Nebendreiecke von einander

ch Verwechſelung erhält man hiezu:

$$\tang\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)=\sqrt{\frac{\tang\frac{1}{4}(a+b+c)\tang\frac{1}{4}(a+c-b)}{\tang\frac{1}{4}(a+b-c)\tang\frac{1}{4}(b+c-a)}};\qquad(47.)$$

$$\tang\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)=\sqrt{\frac{\tang\frac{1}{4}(a+b+c)\tang\frac{1}{4}(c+b-a)}{\tang\frac{1}{4}(a+c-b)\tang\frac{1}{4}(a+b-c)}};\qquad(48.)$$

Dieſe Formeln (45.) — (48.) ſind ſehr brauchbar zur Auflöſung eines Dreieckes, wenn drei Seiten gegeben ſind, da durch Tangenten eine größere Schärfe erreicht werden kann, als durch Sinus oder Koſinus.

Durch das Polar-Nebendreieck $(a\,b\,\overline{c})$ erhält man aus den Gleichungen (41.)—(44.), und zwar

aus (43.):

$$\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)\sin\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}A\,\sin\frac{1}{2}B\,\sin\frac{1}{2}C}}\qquad(49.)$$

aus (44.):

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)\cos\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}A\,\sin\frac{1}{2}B\,\sin\frac{1}{2}C}}\qquad(50.)$$

aus (41.):

$$\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)\cos\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}A\,\cos\frac{1}{2}B\,\sin\frac{1}{2}C}}\qquad(51.)$$

aus (42.):

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)\sin\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}A\,\cos\frac{1}{2}B\,\sin\frac{1}{2}C}}\qquad(52.)$$

Die Diviſion der Gleichung (49.) durch (50.) giebt:

$$\tang\tfrac{1}{4}(a+b+c)=\sqrt{\tang\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\,\tang\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)\,\tang\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\,\tang\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)}\qquad(53.)$$

Proportionen in sphärischen Dreiecken und in Nebenkreisen.

§. 44.

Erklärung. Wenn von einer Winkelspitze A eines sphärischen Dreieckes ABC (Fig. 6.) nach der gegenüberliegenden Seite a ein Bogen AD gezogen wird, so werden die dadurch entstandenen Abschnitte des Winkels A und der Seite a resp. durch A'', A''', a'', a''' bezeichnet, und zwar so, daß A'', a'' die auf der Seite von B liegenden, A''', a''' aber die nach C hin liegenden Abschnitte bedeuten. In Fig. 6. wird demnach DB durch a''; DC durch a'''; DAB durch A''; DAC durch A''' angedeutet. Geht der Bogen von der Spitze B nach der Seite b, so werden die Winkel- und Seitenabschnitte auf der Seite von A durch B', b'; die auf der Seite von C liegenden (EBC, EC) durch B''', b''' bezeichnet. Ebenso werden die durch einen von C nach c geführten Bogen gebildeten Abschnitte von C und c nach ihrer Lage in Bezug auf A und B resp. durch C', c' und C'', c'' bezeichnet. Die Bogen selbst, welche von A nach a, von B nach b, von C nach c gezogen werden, seien durch p', p'', p''' angedeutet. Schneiden sich zwei solcher Bogen, wie AD (p') und BE (p'') (Fig. 6.) in P, so werden die **obern** Abschnitte, AP, BP, d. i. die zwischen dem Durchschnittspunkte P und den zugehörigen Winkelpunkten enthaltenen Theile derselben mit q; die **untern** Abschnitte, wie PD, PE mit r bezeichnet, so daß durch q', r'; q'', r''; q''', r'''; resp. die Abschnitte von p', p'', p''' bezeichnet werden. — Von den Winkeln ADB, ADE, welche p' mit a bildet, wird ersterer durch A'', letzterer, der nach C hinliegende mit A''' bezeichnet; so wie unter B', B'''; $C' C''$ die durch p'', p''' mit b, c gebildete Winkel gemeint sein werden.

§. 45.

Wird von einem Winkelpunkte A eines sphärischen Dreieckes (Fig. 6.) ein Perpendikel (AD) auf die gegenüber lie-

s Nebendreieck $(\alpha\ \beta\ \overline{\gamma})$ giebt

aus (56.):

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(c+b-a)\cos\frac{1}{4}(c+a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}; \qquad (57.)$$

aus (55.):

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}c}; \qquad (58.)$$

Das Nebendreieck $(a\ \overline{\beta}\ \gamma)$ giebt

aus (57.):

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}c}; \qquad (59.)$$

aus (56.):

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(c+a-b)\sin\frac{1}{4}(c+b-a)}{\sin\frac{1}{2}c}; \qquad (60.)$$

aus (55.):

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\frac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(c+a-b)\sin\frac{1}{4}(c+b-a)}{\sin\frac{1}{2}c}; \qquad (61.)$$

aus (58.):

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\sin\frac{1}{2}C} =$$

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}c}; \qquad (62.)$$

Löſt man die Produkte in dieſen Gleichungen nach den Formeln §. 1, 39—42. auf, ſo verwandeln ſie ſich in die

daher $\text{tang}\, c \cos A'' = \text{tang}\, b \cos A'''$ oder $\frac{\cos A''}{\cos A'''} = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, c}$.

5) Die fünfte Proportion folgt aus den vorhergehenden; einfacher aber aus

$$\sin p' = \frac{\text{tang}\, a''}{\text{tang}\, A''} = \frac{\text{tang}\, a'''}{\text{tang}\, A'''}.$$

Zuſ. 1. Für das Perpendikel ſelbſt erhält man aus denſelben Dreiecken

$$\sin p' = \sin B \sin c = \sin b \cdot \sin C.$$

Setzt man für $\sin B$ den Werth $\frac{2g}{\sin a \sin c}$; ſo erhält man durch die Seiten ausgedrückt:

$$\sin p' = \frac{2g}{\sin a}.$$

Aus den Winkeln des Dreieckes findet ſich p', wenn man für $\sin c$ den Werth $\frac{2g}{\sin A \sin B}$ ſetzt; man erhält:

$$\sin p' = \frac{2G}{\sin A}.$$

Für die auf die Seiten b, c gefällten Perpendikel p'', p''', ergiebt ſich:

$$\sin p'' = \frac{2g}{\sin b} = \frac{2G}{\sin B};$$

$$\sin p''' = \frac{2g}{\sin c} = \frac{2G}{\sin C};$$

woraus $\sin p' : \sin p'' : \sin p''' = \frac{1}{\sin a} : \frac{1}{\sin b} : \frac{1}{\sin c}$;

$$= \frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C} \text{ folgt.}$$

Zuſ. 2. Während die Seiten und Winkel des Dreieckes nur poſitiv zu nehmen ſind, können doch die Abſchnitte a'', a''', A'', A''' negative Werthe erhalten. Denn denkt man ſich die Lage der Spitze A veränderlich, ſo kann das Perpendikel AD der Seite AC immer näher kommen, wobei a''' und A''' abnehmen. Fällt AD mit AC zuſammen,

(60.) durch (62.):

$$\tan\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\tan\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin\tfrac{1}{4}(c+a-b)\cos\tfrac{1}{4}(c+b-a)}{\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)};\quad(72.)$$

(59.) durch (58.):

$$\frac{\tan\tfrac{1}{4}(a+b+c)}{\tan\tfrac{1}{2}c}=\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)};\quad(73.)$$

(62.) durch (58.):

$$\frac{\tan\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\tan\tfrac{1}{2}c}=\frac{\cos\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)};\quad(74.)$$

(60.) durch (57.):

$$\frac{\tan\tfrac{1}{4}(c+a-b)}{\tan\tfrac{1}{2}c}=\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)}{\cos\tfrac{1}{4}\quad-\pi)\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)};\quad(75.)$$

(55.) durch (62.):

$$\tan\tfrac{1}{4}(a+b+c)\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\cos\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\cos\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)};\quad(76.)$$

(55.) durch (59.):

$$\tan\tfrac{1}{4}(a+b-c)\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\sin\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\sin\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)};\quad(77.)$$

(56.) durch (61.):

$$\tan\tfrac{1}{4}(c+a-b)\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\tfrac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\tfrac{1}{4}(A+B-C+\pi)}{\cos\tfrac{1}{4}(A-B+C+\pi)\sin\tfrac{1}{4}(B-A+C+\pi)};\quad(78.)$$

§. 41.

Es ist noch übrig, den Flächenraum T des sphärischen Dreieckes durch Formeln zu bestimmen. Da derselbe dem Ueberschusse der Winkelsumme über zwei Rechte gleich ist ($=A+B+C-\pi$), so brauchen wir nur unter den bisher entwickelten Gleichungen und Formeln diejenigen, welche $(A+B+C)$ enthalten, herauszusuchen und zusammenzustellen,

indem für $(A+B+C-\pi)$ sogleich T, für $A+B+C$ aber $T+\pi$ gesetzt werden kann.

Aus der Gleichung (§. 31, II.)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)}{\sin C},$$

erhält man zunächst:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \frac{\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\,\sin C}{\cos\frac{1}{2}c}, \quad (A.)$$

welche Formel Aehnlichkeit mit der planimetrischen

$$\tfrac{1}{2}T = \tfrac{1}{2}a\,.\,\tfrac{1}{2}b\,.\,\sin C$$

hat, in welche sie sich auch verwandelt, wenn die Seiten des sphärischen Dreieckes unendlich klein werden.

Setzt man für $\sin C$ den Werth $\frac{2g}{\sin a\sin b}$, so erhält man nach gehöriger Reduktion den Ausdruck:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \frac{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \quad (B.)$$

welcher dieselbe Analogie mit der Tartalea'schen Formel

$$T = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)\tfrac{1}{2}(a+b-c)\tfrac{1}{2}(a+c-b)\tfrac{1}{2}(c+b-a)}$$

zeigt. Bequem zur logarithmischen Berechnung ist die Formel (B) allerdings. Da indeß $\frac{1}{2}T < \frac{1}{2}\pi$ und $> \frac{1}{2}\pi$ sein kann, so ist sie zweideutig; daher die weiter unten (G) angeführte ungleich einfachere Formel von L'Huilier ihr schon deshalb entschieden vorzuziehen.

Aus §. 36. erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}T = \frac{\cos a+\cos b+\cos c+1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};$$

$$= \frac{2-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \quad (C.)$$

Hieraus läßt sich eine Entscheidung der in (B) vorhandenen Zweideutigkeit herleiten. Ist nämlich $T<\pi$, so ist $\cos\frac{1}{2}T$ positiv, daher muß $\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c>1$ sein. Ist $T>\pi$, so ist $\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c<1$. Für $T=\pi$ ist $\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c=1$.

Aus der Gleichung

$$-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{2g}{\cos a+\cos b+\cos c+1}$$

erhält man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}T=\frac{2g}{\cos a+\cos b+\cos c+1} \qquad (D.)$$

$$=\frac{g}{\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c-1}=\frac{g}{2-\sin^2\tfrac{1}{2}a-\sin^2\tfrac{1}{2}b-\sin^2\tfrac{1}{2}c},$$

Aus §. 38, No. 41, 42, 45. erhält man die Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\frac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{4}(c+b-a)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}; \qquad (E.)$$

$$\cos\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\frac{\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)\cos\tfrac{1}{4}(a+c-b)\cos\tfrac{1}{4}(c+b-a)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}; \qquad (F.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+b-c)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(a+c-b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(c+b-a)}; \qquad (G.)$$

unter denen die letzte vorzüglich bequem zur logarithmischen Berechnung ist. Zweideutigkeit findet hier nicht statt, da $T<2\pi$, also $\frac{1}{4}T<\frac{1}{2}\pi$ sein muß.

Während in diesen Formeln der Flächenraum durch die Seite des Dreieckes bestimmt wird, erhält man ihn durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ausgedrückt nach §. 37, — in der Formel

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}T=\frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b+\cos C}{\sin C}; \qquad (H.)$$

Die Verwandtschaft derselben mit der oben (A) angeführten planimetrischen Formel $\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}b.\sin C$ wird sichtbar, wenn man beide Theile der Formel umkehrt und den Zähler und Nenner des zweiten Theiles mit $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b$ multiplizirt. Sie erhält dann die Form

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}T=\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b.\sin C}{1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b\cos C}. \qquad (I.)$$

Iſt das ſphäriſche Dreieck ein rechtwinkliges und zwar C der rechte Winkel, ſo erhält man den merkwürdigen Ausdruck

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}T = \text{tang}\tfrac{1}{2}a \,.\, \text{tang}\tfrac{1}{2}b.$$

wie bei dem ebnen rechtwinkligen Dreiecke $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}a \,.\, \frac{1}{2}b$.

§. 42.

Andere Relationen zwiſchen dem Flächenraume, den Seiten und Winkeln des Dreieckes finden ſich in den bis §. 40. entwickelten Gleichungen noch mehrere. Bemerkenswerth iſt beſonders die Gleichung

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}a \,\text{tang}\tfrac{1}{2}b = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}. \quad (\text{§. 31, V.})$$

Indem für $-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ geſetzt wird $\sin\frac{1}{2}T$, erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \text{tang}\tfrac{1}{2}a \,.\, \text{tang}\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}(A+B-C);\ *)$$

aus welcher Formel ſich der Satz vom Maximum des Flächenraumes bei zwei gegebenen Seiten (g. S. §. 86. u. 87.) leicht ergiebt. Denn ſind die Seiten a, b unveränderlich, ſo ändert ſich T nur nach $(A+B-C)$. Das Maximum von $\cos\frac{1}{2}(A+B-C)$ iſt $=1$, wo dann $A+B-C=0$, oder $A+B=C$ iſt. Dann liegt aber das Dreieck in einem Halbkreiſe (g. S. §. 75, Zuſ. 2.), d. h. die dritte Seite c iſt der ſphäriſche Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes. Nun iſt jedoch das Maximum von T mit dem von $\sin\frac{1}{2}T$ nur dann verbunden, wenn $\sin\frac{1}{2}T$ mit T beſtändig wächſt, d. i. wenn T nicht $>\pi$, oder wenn $A+B+C$ nicht $>2\pi$ werden kann. Da indeß die Schenkel a, b jede beliebige Oeffnung erhalten können, ſo kann C ſo nahe an π kommen, als man will. Soll dabei nun die Summe $A+B+C$ nicht $>2\pi$ werden, ſo darf $A+B$ nicht $>\pi$ werden; daher muß $a+b$ nicht $>\pi$ ſein; — dieſelbe Bedingung des Maximums, welche g. S. §. 86, 87, 88 nachgewieſen wurde.

*) Man bemerke, daß auch bei ebnen Dreiecken die Formel $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b \,.\, \cos\frac{1}{2}(A+B-C)$ gilt, die mit der oben erwähnten zuſammenfällt, indem hier $A+B+C=\pi$, alſo $\cos\frac{1}{2}(A+B-C)=\sin C$ iſt.

Für das Maximum, wo $\cos\frac{1}{2}(A+B-C)=1$ ist, erhält man die merkwürdige Formel:

$$\sin\tfrac{1}{2}T=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b,$$

die ein zweites Analogon zu dem ebnen rechtwinkligen Dreiecke, das ebenfalls im Halbkreise liegt und das Maximum der Katheten ist, liefert.

Oben (§. 41.) wurde für das rechtwinklige sphärische Dreieck aus den Katheten a, b der Ausdruck

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}T=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b$$

gefunden. Hieraus ist ersichtlich, wie sich das rechtwinklige sphärische Dreieck zu dem Maximum, das durch die Katheten bedingt wird, verhält. Wird der Flächenraum des letztern mit M, der des rechtwinkligen Dreieckes mit L bezeichnet, so ist:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}L = \sin\tfrac{1}{2}M,$$

$$\text{oder}\quad \frac{\sin\frac{1}{2}L}{\sin\frac{1}{2}M}=\frac{\cos\frac{1}{2}L}{1}.$$

Um das Verhältniß von M und L selbst geometrisch darzustellen, nehme man (Fig. 5.) den Bogen $AC=\frac{1}{2}M$; errichte in C ein Perpendikel und ziehe unter einem halben Rechten (CAB) den Bogen AB; so ist $CB=\frac{1}{2}L$. Denn es ist $\operatorname{tang}BC=\operatorname{tang}CAB.\sin AC=\sin AC=\sin\frac{1}{2}M$; also $\operatorname{tang}BC=\operatorname{tang}\frac{1}{2}L$ und $BC=\frac{1}{2}L$.

Wie ein Bogen zu konstruiren ist, der dem Flächenraume eines sphärischen Dreieckes gleich ist, wird weiter unten gezeigt werden.

§. 43.

Für den Perimeter $(a+b+c)$ des sphärischen Dreieckes finden sich ähnliche Ausdrücke, wie für den Flächenraum, die leicht nachgesehen werden können. Bemerkenswerth sind die Beziehungen, welche zwischen den Perimetern, Flächenräumen, Seiten und Winkeln der Nebendreiecke statt finden. Bezeichnen wir mit P den Umfang des Dreieckes $(\alpha\beta\gamma)$; mit P′, P″, P‴ die der Nebendreiecke $(\bar{\alpha}\beta\gamma)$,

$(\alpha\bar{\beta}\gamma)$, $(\alpha\beta\bar{\gamma})$; ferner mit T', T'', T''' die Flächenräume derſelben; ſo iſt

$$P' = a + \bar{b} + \bar{c} = 2\pi - (c + b - a).$$ Eben ſo

$$P'' = 2\pi - (a + c - b);$$
$$P''' = 2\pi - (a + b - c).$$

Ferner iſt $$T' = A + \bar{B} + \bar{C} - \pi = 2\pi - (C + B - A + \pi);$$
$$= \pi - (C + B - A);$$
$$T'' = 2\pi - (A + C - B + \pi) = \pi - (A + C - B);$$
$$T''' = 2\pi - (A + B - C + \pi) = \pi - (A + B - C).$$

Subſtituirt man dieſe Ausdrücke in der Formel

$$\sin A = \frac{2V \sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin b \sin c}$$

ſo erhält man:

$$\sin A = \frac{2V \sin\frac{1}{2}P \cdot \sin\frac{1}{2}P' \sin\frac{1}{2}P'' \sin\frac{1}{2}P'''}{\sin b \sin c}.$$

Die Formel $\sin a' = \frac{2G}{\sin B \sin C}$ (§. 29.) verwandelt ſich dann in folgende:

$$\sin a = \frac{2V \sin\frac{1}{2}T \sin\frac{1}{2}T' \sin\frac{1}{2}T'' \sin\frac{1}{2}T'''}{\sin B \sin C}.$$

Die §. 29. bemerkte Relation $\frac{g}{G} = \frac{\sin a}{\sin A}$ erhält man unter der Form

$$\frac{\sin\frac{1}{2}P \sin\frac{1}{2}P' \sin\frac{1}{2}P'' \sin\frac{1}{2}P'''}{\sin\frac{1}{2}T \sin\frac{1}{2}T' \sin\frac{1}{2}T'' \sin\frac{1}{2}T'''} = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 A}.$$

Aus der Gleichung

$$\tang\tfrac{1}{4}(A + B + C - \pi)\tang\tfrac{1}{4}(A + B - C + \pi) =$$
$$\tang\tfrac{1}{2}(a + b + c)\tang\tfrac{1}{2}(a + b - c)$$

erhält man:

$$\tang\tfrac{1}{4}T \cdot \cotg\tfrac{1}{4}T'' = \tang\tfrac{1}{4}P \cdot \cotg\tfrac{1}{4}P'',$$

oder . . . . . $\frac{\tang\frac{1}{4}T}{\tang\frac{1}{4}T''} = \frac{\tang\frac{1}{4}P}{\tang\frac{1}{4}P'''}$.

Es findet alſo zwiſchen den Flächenräumen und Umfängen zweier Dreiecke, die unmittelbar Nebendreiecke von einander

sind, oder die zusammen eine sphärische Spindel bilden, die bemerkenswerthe Beziehung statt, daß die Tangenten der Viertel-Flächenräume den Tangenten der Viertel-Umfänge proportionirt sind.

Aus der Gleichung

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A-B+C+\pi)}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(B-A+C+\pi)}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a-b+c)}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(b-a+c)} \quad (\S.\ 40,\ 66.)$$

ergiebt sich $\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}T'}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}T''}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}P'}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}P''}$.

Also auch bei den zwei übrigen Nebendreiecken des Systemes $\alpha\beta\gamma$, $\bar{\alpha}\beta\gamma$, $\alpha\bar{\beta}\gamma$, $\alpha\beta\bar{\gamma}$ findet dieselbe Proportionalität statt. Sie gilt daher bei jeden beliebigen zwei Dreiecken des genannten Systemes.

Aus der Gleichung

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(A+B-C+\pi)}=\operatorname{tang}\frac{1}{4}(c+a-b)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(c+b-a) \quad (\S.\ 40,\ 64.)$$

erhält man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T'''=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}P'\operatorname{cotg}\tfrac{1}{4}P'',$$

oder $\operatorname{tang}\frac{1}{4}T\operatorname{tang}\frac{1}{4}T'''\operatorname{tang}\frac{1}{4}P'\operatorname{tang}\frac{1}{4}P''=1$;

durch Verwechselung ergiebt sich dazu:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T'\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P''\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P'''=1;$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T''\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P'\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P'''=1.$$

Ferner ist nach §. 40, 65.

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T'\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T''\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P'''=1;$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T'\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T'''\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P''=1;$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T''\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}T'''\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}P'=1.$$

In dem Systeme der vier Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\bar{\alpha}\beta\gamma$, $\alpha\bar{\beta}\gamma$, $\alpha\beta\bar{\gamma}$, ist also das Produkt aus den Tangenten der Viertelflächenräume beliebig zweier und der Viertel-Umfänge der andern beiden unveränderlich $=1$.

Daraus folgt noch:

$\operatorname{tang}\frac{1}{4}T$ t ... $'''$ $\operatorname{tang}\frac{1}{4}P$

Proportionen in sphärischen Dreiecken und in Nebenkreisen.

§. 44.

Erklärung. Wenn von einer Winkelspitze A eines sphärischen Dreieckes ABC (Fig. 6.) nach der gegenüberliegenden Seite a ein Bogen AD gezogen wird, so werden die dadurch entstandenen Abschnitte des Winkels A und der Seite a resp. durch A'', A''', a'', a''' bezeichnet, und zwar so, daß A'', a'' die auf der Seite von B liegenden, A''', a''' aber die nach C hin liegenden Abschnitte bedeuten. In Fig. 6. wird demnach DB durch a''; DC durch a'''; DAB durch A''; DAC durch A''' angedeutet. Geht der Bogen von der Spitze B nach der Seite b, so werden die Winkel- und Seitenabschnitte auf der Seite von A durch B', b'; die auf der Seite von C liegenden (EBC, EC) durch B''', b''' bezeichnet. Ebenso werden die durch einen von C nach c geführten Bogen gebildeten Abschnitte von C und c nach ihrer Lage in Bezug auf A und B resp. durch C', c' und C'', c'' bezeichnet. Die Bogen selbst, welche von A nach a, von B nach b, von C nach c gezogen werden, seien durch p', p'', p''' angedeutet. Schneiden sich zwei solcher Bogen, wie AD (p') und BE (p'') (Fig. 6.) in P, so werden die **obern** Abschnitte, AP, BP, d. i. die zwischen dem Durchschnittspunkte P und den zugehörigen Winkelpunkten enthaltenen Theile derselben mit q; die **untern** Abschnitte, wie PD, PE mit r bezeichnet, so daß durch q', r'; q'', r''; q''', r'''; resp. die Abschnitte von p', p'', p''' bezeichnet werden. — Von den Winkeln ADB, ADE, welche p' mit a bildet, wird ersterer durch A'', letzterer, der nach C hinliegende mit A''' bezeichnet; so wie unter B', B'''; $C' C''$ die durch p'', p''' mit b, c gebildete Winkel gemeint sein werden.

§. 45.

Wird von einem Winkelpunkte A eines sphärischen Dreieckes (Fig. 6.) ein Perpendikel (AD) auf die gegenüber lie-

gende Seite a gefällt; ſo finden zwiſchen den dadurch entſtandenen Abſchnitten des Winkels A und der Seite a folgende Proportionen ſtatt:

1) $\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\text{tang } C}{\text{tang } B}$;
2) $\frac{\cos a''}{\cos a'''} = \frac{\cos c}{\cos b}$;

d. h. die Sinus der Seitenabſchnitte umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Winkel; die Koſinus derſelben wie die Koſinus der anliegenden Seiten.

3) $\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\cos B}{\cos C}$;
4) $\frac{\cos A''}{\cos A'''} = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } c}$;

die Sinus der Winkelabſchnitte wie die Koſinus der nächſtliegenden Winkel; die Koſinus derſelben umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Seiten.

5) $\frac{\text{tang } a''}{\text{tang } a'''} = \frac{\text{tang } A''}{\text{tang } A'''}$;

die Tangenten der Winkelabſchnitte ſind proportionirt den Tang. der gegenüberliegend. Seitenabſchnitte.

Beweis. 1) In dem rechtwinkligen Dreiecke ADB iſt

$$\text{tang } p' = \text{tang } B \cdot \sin a'';$$

in dem rechtwinkligen Dreiecke ADC iſt

$$\text{tang } p' = \text{tang } C \cdot \sin a''';$$

daher $\text{tang } B \cdot \sin a'' = \text{tang } C \sin a'''$, folglich

$$\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\text{tang } C}{\text{tang } B}.$$

2) In dem genannten Dreiecke iſt

$$\cos p' = \frac{\cos c}{\cos a''} = \frac{\cos b}{\cos a'''},$$

daher die zweite Proportion.

3) In dem Dreieck ADB iſt $\cos p' = \frac{\cos B}{\sin A''}$; im Dreieck ADC iſt $\cos p' = \frac{\cos C}{\sin A'''}$; daher $\frac{\cos B}{\sin A''} = \frac{\cos C}{\sin A'''}$, woraus die dritte Proportion folgt.

4) In dem Dreiecke ADB iſt

$$\text{tang } p' = \text{tang } c \cos A'';$$ im Dreieck ADC

$$\text{tang } p' = \text{tang } b \cos A''';$$

daher $\text{tang}\, c \cos A'' = \text{tang}\, b \cos A'''$ oder $\frac{\cos A''}{\cos A'''} = \frac{\text{tang}\, b}{\text{tang}\, c}$.

5) Die fünfte Proportion folgt aus den vorhergehenden; einfacher aber aus

$$\sin p' = \frac{\text{tang}\, a''}{\text{tang}\, A''} = \frac{\text{tang}\, a'''}{\text{tang}\, A'''}.$$

Zuſ. 1. Für das Perpendikel ſelbſt erhält man aus denſelben Dreiecken

$$\sin p' = \sin B \sin c = \sin b \cdot \sin C.$$

Setzt man für $\sin B$ den Werth $\frac{2g}{\sin a \sin c}$; ſo erhält man durch die Seiten ausgedrückt:

$$\sin p' = \frac{2g}{\sin a}.$$

Aus den Winkeln des Dreieckes findet ſich p', wenn man für $\sin c$ den Werth $\frac{2g}{\sin A \sin B}$ ſetzt; man erhält:

$$\sin p' = \frac{2G}{\sin A}.$$

Für die auf die Seiten b, c gefällten Perpendikel p'', p''', ergiebt ſich:

$$\sin p'' = \frac{2g}{\sin b} = \frac{2G}{\sin B};$$

$$\sin p''' = \frac{2g}{\sin c} = \frac{2G}{\sin C};$$

woraus $\sin p' : \sin p'' : \sin p''' = \frac{1}{\sin a} : \frac{1}{\sin b} : \frac{1}{\sin c}$;

$$= \frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C} \text{ folgt.}$$

Zuſ. 2. Während die Seiten und Winkel des Dreieckes nur poſitiv zu nehmen ſind, können doch die Abſchnitte a'', a''', A'', A''' negative Werthe erhalten. Denn denkt man ſich die Lage der Spitze A veränderlich, ſo kann das Perpendikel AD der Seite AC immer näher kommen, wobei a''' und A''' abnehmen. Fällt AD mit AC zuſammen,

$a'''=0$; $A'''=0$. Geht AD über AC hinaus, a''' und A''' wieder zu, jedoch nach entgegengeſetzter Richtung. Demnach nehmen a''', A''' in dieſem Falle die entgegengeſetzten Werthe der vorigen an. Nimmt man die Abſchnitte als poſitive, wenn ſie innerhalb des Dreieckes liegen, ſo ſind die außerhalb liegenden negativ; umgekehrt iſt von negativen Werthen derſelben auf deren Lage außerhalb des Dreieckes zu ſchließen. — Daß von den Abſchnitten a'', a''', ſo wie von A'', A''' nur einer, nicht beide zugleich, negativ werden kann, iſt an ſich klar.

Nach g. S. §. 39. fällt das Perpendikel innerhalb des Dreieckes, wenn die an der Grundſeite liegenden Winkel gleichartig; außerhalb, wenn dieſe ungleichartig ſind. Daſſelbe geht aus den Formeln

$$\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\tang C}{\tang B};$$

$$\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\cos B}{\cos C} \quad \text{hervor.}$$

Daß von den Abſchnitten a'', a''' derjenige, welcher an dem, dem Rechten näheren Winkel liegt, immer $< \frac{1}{2}\pi$ ſein muß, ſo wie der gegenüber liegende Winkelabſchnitt, iſt g. S. §. 39. Zuſ. 2. bemerkt worden. Hier läßt ſich dies ſehr einfach nachweiſen. Denn es iſt:

$$\cos a''' = \frac{\cos b}{\cos p}; \quad \text{und} \quad \cos p = \frac{\cos B}{\sin A''};$$

daher $$\cos a''' = \frac{\cos b \cdot \sin A''}{\cos B}.$$

Iſt nun C dem Rechten näher als B, ſo ſind B und b gleichartig; daher $\cos a'''$ poſitiv; mithin $a''' < \frac{1}{2}\pi$.

Zuſ. 3. Merkwürdig iſt der Fall, wenn der Winkel A dem Supplemente von a gleich iſt. Es iſt alsdann A''' das Komplement von a''; A'' das Komplement von a'''.

Denn iſt $A=\pi-a$; ſo iſt $\sin A=\sin a$; alſo auch $\sin B=\sin b$; $\sin C=\sin c$; mithin, da wenigſtens zwei

Seiten mit den gegenüber liegenden Winkeln gleichartig sein müssen,

$$B=b;\quad C=c.$$

Nun ist $\text{tang}\, a''' = \cos C \,\text{tang}\, b$ (§. 16.); oder, da $C=c$ ist,

$$= \cos c \,\text{tang}\, b,$$

und $\quad \text{cotg}\, A'' = \cos c \,\text{tang}\, B$ (§. 16.); oder, da $B=b$,

$$= \cos c \,\text{tang}\, b,$$

folglich $\text{tang}\, a''' = \text{cotg}\, A''$ oder $A'' = \frac{1}{2}\pi - a'''$.

Hieraus und aus $A=\pi-a$ folgt, daß auch

$$A''' = \tfrac{1}{2}\pi - a''$$ ist.

Wenn umgekehrt $A'' = \frac{1}{2}\pi - a'''$ ist, so ist auch

$$A''' = \tfrac{1}{2}\pi - a'';\quad A=\pi-a;\quad B=b;\quad C=c.$$

Denn es ist:

$$\text{tang}\, A''' = \frac{\text{tang}\, a'''}{\sin p'}$$ (§. 16.) und

$$\text{tang}\, a'' = \text{tang}\, A'' \sin p';$$

oder, da $A'' = \frac{1}{2}\pi - a'''$ vorausgesetzt wird,

$$\text{tang}\, a'' = \text{cotg}\, a''' \sin p' = \frac{\sin p'}{\text{tang}\, a'''}.$$

Daher $\text{tang}\, A''' = \dfrac{1}{\text{tang}\, a''}$, folglich $A''' = \frac{1}{2}\pi - a''$;

mithin auch $A=\pi-a$; $B=b$; $C=c$.

Zus. 4. Mit Hülfe des Perpendikels läßt sich die Auflösung schiefwinkliger Dreiecke auf die Auflösung rechtwinkliger zurückführen, indem man durch ein Perpendikel das zu berechnende Dreieck in zwei rechtwinklige zerlegt, von denen das eine zwei der gegebenen Stücke enthält, was freilich in den beiden Fällen, wenn drei Seiten oder drei Winkel gegeben sind, nicht möglich ist.

1) Sind zwei Seiten a, b, und der eingeschlossene Winkel C gegeben, so fälle man von A (oder auch von B) das Perpendikel AD. In dem rechtwinkligen Dreiecke ADC, wo die Hypotenuse AC (b) und der anliegende Winkel C bekannt ist, hat man:

1) $\sin p = \sin b \sin C.$
2) $\operatorname{tang} a''' = \operatorname{tang} b \cos C.$
3) $\operatorname{cotg} A''' = \cos b \operatorname{tang} C.$

Nachdem hierdurch p', a''', A''' bestimmt sind, erhält man in dem Dreiecke ADB

1) $a'' = a - a'''$;
2) $\cos c = \cos a'' \cos p$;
3) $\operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} p}{\sin a''}$;
4) $\operatorname{tang} A'' = \frac{\operatorname{tang} a''}{\sin p}$ und $A = A'' + A'''$.

2) Sind zwei Winkel A, B und die anliegende Seite c gegeben, so fälle man von A (oder B) das Perpendikel AD. In dem rechtwinkligen Dreiecke ADB ist dann wieder die Hypotenuse c und der anliegende Winkel B gegeben; woraus sich wie oben die übrigen Stücke dieses Dreieckes und mittelst derselben die des andern Dreieckes ADC finden lassen.

Derselbe Fall findet statt, wenn zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel, oder wenn zwei Winkel und eine gegenüber liegende Seite gegeben sind.

3) Wenn drei Seiten gegeben sind, fälle man von einer beliebigen Ecke, etwa A, ein Perpendikel. Aus

$$\frac{\cos a''}{\cos a'''} = \frac{\cos c}{\cos b} \text{ folgt}$$

$$\frac{\cos a''' - \cos a''}{\cos a''' + \cos a''} = \frac{\cos b - \cos c}{\cos b + \cos c}, \text{ oder}$$

$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a'' + a''') \operatorname{tang} \frac{1}{2}(a'' - a''') = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c+b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c-b).$

Da $a'' + a''' = a$ ist, so erhält man hieraus

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a'' - a''') = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(c+b) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(c-b)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} a}.$$

Man erhält hieraus die Differenz $a'' - a'''$. Die Summe $a'' + a'''$ ist gegeben; daher finden sich aus $(a'' + a''') \pm (a'' - a''')$ beide Abschnitte a'', a'''. Hat man diese, so ist in jedem der

Dreiecke ADB, ADC die Hypotenuse und eine Kathete bekannt, aus denen sich die Winkel finden.

4) Sind die Winkel gegeben, so erhält man, nachdem das Perpendikel p′ gefällt ist, aus der Proportion

$$\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\cos B}{\cos C}$$ die Gleichung

$$\frac{\sin A'' - \sin A'''}{\sin A'' + \sin A'''} = \frac{\cos B - \cos C}{\cos B + \cos C}, \text{ oder}$$

$$\frac{\tang \frac{1}{2}(A'' - A''')}{\tang \frac{1}{2}(A'' + A''')} = \tang \frac{1}{2}(C + B) \tang \frac{1}{2}(C - B);$$

daher $\tang \frac{1}{2}(A'' - A''') = \tang \frac{1}{2} A . \tang \frac{1}{2}(C + B) \tang \frac{1}{2}(C - B)$.

Hieraus findet sich A″ und A‴. Man hat sodann in jedem der Dreiecke ADB, ADC zwei Winkel, aus denen die Seiten sich finden lassen.

Wo hier Sinus vorkommen, läßt sich die Zweideutigkeit derselben nach den bereits bekannten Regeln entscheiden. Auch die Kosinus der Winkel- und Seitenabschnitte erzeugen hierbei Zweideutigkeit, indem zu einem und demselben Kosinus ein positiver und ein negativer Winkel oder Bogen genommen werden kann. Diese Zweideutigkeit entscheidet die Lage des Perpendikels, die aus den an der Grundseite liegenden Winkeln oder Seiten erkannt wird. In den sogenannten zweideutigen Fällen (wenn zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel oder zwei Winkel und eine gegenüber liegende Seite gegeben sind), ist die nöthige Entscheidung g. S. §. 39, Zus. 3. zu suchen.

Anmerk. Die oben §. 19. u. f. gebrauchten Hülfsgrößen, zur Zusammenziehung der allgemeinen Formeln in Faktoren sind zum Theil nichts anderes, als die durch Perpendikel erzeugten Seiten- oder Winkelabschnitte, oder die Perpendikel selbst. Wenigstens lassen sich beide ganz in Uebereinstimmung bringen.

§. 46.

Lehrsatz. Zwischen den durch zwei Perpendikel — das eine von A, das andere von B aus-

— gebildeten Seiten- und Winkelabſchnitten finden folgende Verhältniſſe ſtatt:

$$\frac{\text{tang } A'}{\text{tang } B'} = \frac{\text{tang } A}{\text{tang } B};$$ die Tangenten der benachbarten Winkelabſchnitte wie die Tangenten der ganzen Winkel.

2) $$\frac{\text{tang } A'''}{\text{tang } B'''} = \frac{\cos a}{\cos b};$$ die Tangenten der getrennten Winkelabſchnitte umgekehrt wie die Koſinus der anliegenden Seiten.

3) $$\frac{\text{tang } a'''}{\text{tang } b'''} = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a};$$ die Tangenten der benachbarten Seitenabſchn. umgekehrt wie die Tang. der ganzen Seiten.

4) $$\frac{\text{tang } a''}{\text{tang } b'} = \frac{\cos B}{\cos A};$$ die Tang. der getrennten Seitenabſchn. wie die Koſinus der anliegenden Winkel.

5) $$\frac{\text{tang } p'}{\text{tang } p''} = \frac{\sin a'''}{\sin b'''};$$ die Tangenten der Perpendikel wie die Sinus der von denſelben eingeſchloſſenen Seitenabſchnitte.

6) $$\frac{\cos p'}{\cos p''} = \frac{\sin B'''}{\sin A'''};$$ die Koſinus der Perpendikel wie die Sinus der von denſelben eingeſchl. Winkelabſchnitte.

Beweis. 1) In den rechtwinkligen Dreiecken ADB und AEB, welche die Hypotenuſe c gemein haben, iſt

$$\text{tang } B \text{ tang } A' \cos c = 1; \text{ und}$$
$$\text{tang } A \text{ tang } B' \cos c = 1; \quad (\S.\ 16.)$$

daher $\text{tang } A \text{ tang } B' = \text{tang } B \text{ tang } A''$,

oder $$\frac{\text{tang } A''}{\text{tang } B'} = \frac{\text{tang } A}{\text{tang } B}.$$

2) In den Dreiecken ADC, AEC, denen der Winkel C gemein iſt, iſt:

$$\text{tang } A''' \text{ tang } C \cos b = 1;$$
$$\text{tang } B''' \text{ tang } C \cos a = 1; \quad (\S.\ 16.)$$

daher $\text{tang } A''' \cos b = \text{tang } B''' \cos a$;

oder $$\frac{\text{tang } A'''}{\text{tang } B'''} = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

3) In denſelben Dreiecken iſt:

$$\cos C = \frac{\operatorname{tang} a'''}{\operatorname{tang} b} = \frac{\operatorname{tang} b'''}{\operatorname{tang} a},$$

daher $\frac{\operatorname{tang} a'''}{\operatorname{tang} b'''} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$.

4) In den Dreiecken ADB, AEB iſt:

$$\operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang} a''}{\cos B} = \frac{\operatorname{tang} b'}{\cos A},$$

alſo . . . . $\frac{\operatorname{tang} a''}{\operatorname{tang} b'} = \frac{\cos B}{\cos A}$.

5) In den Dreiecken ADC, BEC iſt:

$$\operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} p'}{\sin a'''} = \frac{\operatorname{tang} p''}{\sin b'''},$$

daher . . . . $\frac{\operatorname{tang} p'}{\operatorname{tang} p''} = \frac{\sin a'''}{\sin b'''}$.

6) In demſelben Dreiecke iſt:

$\cos C = \cos p' \sin A''' = \cos p'' \sin B'''$; daher

$$\frac{\cos p'}{\cos p''} = \frac{\sin B'''}{\sin A'''}.$$

Zuſatz. Zwiſchen den Abſchnitten der Perpendikel, q', r', q'', r'' findet die Relation

$$\operatorname{tang} q' \operatorname{tang} r' = \operatorname{tang} q'' \operatorname{tang} r'' \quad \text{oder}$$

$$\frac{\operatorname{tang} q'}{\operatorname{tang} q''} = \frac{\operatorname{tang} r''}{\operatorname{tang} r'} \quad \text{ſtatt.}$$

Denn in dem Dreiecke BDP iſt

$$\cos BPD = \frac{\operatorname{tang} PD}{\operatorname{tang} BP} = \frac{\operatorname{tang} r'}{\operatorname{tang} q''}.$$

In dem Dreiecke APE iſt

$$\cos APE = \frac{\operatorname{tang} PE}{\operatorname{tang} AP} = \frac{\operatorname{tang} r''}{\operatorname{tang} q'}.$$

Da $BPD = APE$ iſt, ſo folgt $\frac{\operatorname{tang} r'}{\operatorname{tang} q''} = \frac{\operatorname{tang} r''}{\operatorname{tang} q'}$,

oder $\operatorname{tang} q' \operatorname{tang} r' = \operatorname{tang} q'' \operatorname{tang} r''$.

§. 47.

Lehrſatz. Die von den Winkelſpitzen eines ſphäriſchen Dreieckes auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten drei Perpendikel ſchneiden ſich in einem und demſelben Punkte.

Beweis. In dem Dreiecke ABC (Fig. 8.) ſeien die Perpendikel AD, BE (p', p'') gezogen, die ſich in P ſchneiden. Ginge das dritte Perpendikel CF nicht durch P, ſo trifft das von P auf AB gefällte Perpendikel PG in einem von F verſchiedenen Punkte G dieſelbe Seite. Die durch das Perpendikel CF gebildeten Seitenabſchnitte AF, BF geben nach §. 45. die Proportion

$$\frac{\sin AF}{\sin BF} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A}.$$

In dem Dreiecke APB hat man nach demſelben Satze

$$\frac{\sin AG}{\sin BG} = \frac{\operatorname{tang} B'}{\operatorname{tang} A''}.$$

Nach §. 46. Num. 1. iſt $\frac{\operatorname{tang} B'}{\operatorname{tang} A''} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A}$; alſo iſt

$$\frac{\sin AG}{\sin BG} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A},$$

folglich müßte $\frac{\sin AG}{\sin BG} = \frac{\sin AF}{\sin BF}$ ſein, was nicht möglich iſt, wofern F und G nicht zuſammenfallen. Denn bezeichnet man GB mit x; FB mit x'; ſo iſt $AG = c - x$; $AF = c - x'$. Iſt nun

$$\frac{\sin(c-x)}{\sin x} = \frac{\sin(c-x')}{\sin x'}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin c \cos x - \cos c \sin x}{\sin x} = \frac{\sin c \cos x' - \cos c \sin x'}{\sin x'};$$

oder $\sin c \operatorname{cotg} x - \cos c = \sin c \operatorname{cotg} x' - \cos c$;

ſo müßte $\sin c \operatorname{cotg} x = \sin c \operatorname{cotg} x'$,

alſo $x = x'$, d. i. $BG = BF$ ſein; was der Annahme widerſpricht. Daher muß das dritte Perpendikel auch durch P gehen.

Zuſ. 1. Daher iſt

$$\text{tang}q'\,\text{tang}r' = \text{tang}q''\,\text{tang}r'' = \text{tang}q'''\,\text{tang}r'''.$$

Zuſ. 2. Die Perpendikel zweier Polardreiecke ſchneiden ſich alle in einem Punkte. Denn iſt A'B'C' (Fig. 9.) das Polardreieck von ABC, ſo ſteht der von A' durch A gezogene Bogen in D, D' ſenkrecht auf den Seiten BC, B'C', deren Pole reſp. A', A ſind. Es liegen alſo die Perpendikel der korreſpondirenden Spitzen A, A' in einem und demſelben Hauptkreiſe. Daſſelbe gilt von den Perpendikeln der Spitzen B, B' und C, C', daher iſt die Behauptung klar.

Zuſ. 3. Von den korreſpondirenden Perpendikeln zweier Polardreiecke iſt jedes das Supplement des andern. Denn es iſt $A'D = \frac{1}{2}\pi$; $AD' = \frac{1}{2}\pi$; daher:

$$\pi = A'D + AD' = A'A + AD + AD' = AD + A'D'.$$

§. 48.

Lehrſatz. Wenn in einem rechtwinkligen ſphäriſchen Dreiecke aus der Spitze des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuſe gefällt wird, ſo iſt:

1) der Sinus des Perpendikels die mittlere Proportionale zwiſchen den Tangenten der Hypotenuſenabſchnitte;

2) die Tangente jeder Kathete die mittlere Proportionale zwiſchen den Tangenten der Hypotenuſe und des anliegenden Abſchnittes derſelben.

Beweis. 1) In dem rechtwinkligen Dreiecke BAC (Fig. 7.) iſt:

$$\sin p' = \frac{\text{tang}a''}{\text{tang}A''} = \frac{\text{tang}a'''}{\text{tang}A'''}$$

daher $\sin^2 p' = \frac{\text{tang}a''\,\text{tang}a'''}{\text{tang}A''\,\text{tang}A'''}$.

Iſt nun A der rechte Winkel, ſo iſt $A'' + A''' = A = \frac{1}{2}\pi$; folglich $\text{tang}A''\,\text{tang}A''' = 1$; daher $\sin^2 p = \text{tang}a''.\,\text{tang}a'''$.

2) dem rechtwinkligen Dreiecke ADC iſt:

$$\cos C = \frac{\operatorname{tang} a'''}{\operatorname{tang} b};$$

in dem ganzen Dreiecke ABC, deſſen Winkel A der rechte iſt, iſt:

$$\cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a};$$

daraus folgt $\frac{\operatorname{tang} a'''}{\operatorname{tang} b} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$ oder

$$\operatorname{tang}^2 b = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} a'''.$$

Eben ſo erhält man aus den Dreiecken ADB, ABC

$$\cos B = \frac{\operatorname{tang} a''}{\operatorname{tang} c} = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a};$$ woraus

$$\operatorname{tang}^2 c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} a''$$ folgt.

Zuſ. 1. Die Quadrate der Tangenten der Katheten verhalten ſich wie die Tangenten der anliegenden Hypotenuſenabſchnitte. Denn aus

$\operatorname{tang}^2 b = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} a'''$ und $\operatorname{tang}^2 c = \operatorname{tang} a \operatorname{tang} a''$

folgt: $$\frac{\operatorname{tang}^2 b}{\operatorname{tang}^2 c} = \frac{\operatorname{tang} a'''}{\operatorname{tang} a''}.$$

Zuſ. 2. Auch iſt das Produkt der Sinus der Katheten gleich dem Produkte der Sinus der Hypotenuſe und des Perpendikels. Denn aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC, ABC erhält man:

$$\sin C = \frac{\sin p}{\sin b} = \frac{\sin c}{\sin a}$$

woraus: $$\sin b \sin c = \sin a . \sin p'$$ folgt.

§. 49.

Lehrſatz. Wenn von einer Spitze (A) eines ſphäriſchen Dreieckes nach einem beliebigen Punkte der gegenüber liegenden Seite (a) ein Bogen (p′) gezogen wird, ſo finden folgende Gleichungen ſtatt:

1) $\sin a \cos p' = \sin a'' \cos b + \sin a''' \cos c;$

2) $\sin A \operatorname{cotg} p' = \sin A'' \operatorname{cotg} b + \sin A''' \operatorname{cotg} c$;

3) $\sin a \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' = \sin a''' \operatorname{cotg} B - \sin a'' \operatorname{cotg} C$;

4) $\sin A \cos \mathfrak{A}''' = \sin A''' \cos B - \sin A'' \cos C$;

5) $\cos \mathfrak{A}''' \sin a \sin p' = \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c$;

6) $\dfrac{\operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A}{\sin p'} = \cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c$;

7) $\dfrac{\sin A'' . \sin a'''}{\sin A''' . \sin a''} = \dfrac{\sin b}{\sin c}$

Beweis. 1) Wird in dem Dreiecke ABC (Fig. 10.) der Bogen AD beliebig gezogen, so ist in dem dadurch entstandenen Dreiecke ABD

$$\cos B = \frac{\cos p' - \cos a'' \cos c}{\sin a'' \sin c};$$ (§. 12.)

in dem ganzen Dreiecke ABC ist:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c};$$

daher ist $\dfrac{\cos p' - \cos a'' \cos c}{\sin a''} = \dfrac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a}$

oder $\sin a (\cos p' - \cos a'' \cos c) = \sin a'' (\cos b - \cos a \cos c)$

daher:

$\sin a \cos p' = \sin a'' \cos b + (\sin a \cos a'' - \cos a \sin a'') \cos c;$

$= \sin a'' \cos b + \sin (a - a'') \cos c;$

$= \sin a'' \cos b + \sin a''' \cos c;$

2) In denselben Dreiecken ist nach der dritten Hauptgleichung (§. 14.)

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} p' \sin c - \cos A'' \cos c}{\sin A''}$$

und $\operatorname{cotg} B = \dfrac{\operatorname{cotg} b \sin c - \cos A \cos c}{\sin A}$;

hieraus folgt:

$\sin A (\operatorname{cotg} p' \sin c - \cos A'' \cos c) = \sin A'' (\operatorname{cotg} b \sin c - \cos A \cos c);$

und, wenn alles mit $\sin c$ dividirt wird

$\sin A (\operatorname{cotg} p' - \cos A'' \operatorname{cotg} c) = \sin A'' (\operatorname{cotg} b - \cos A \operatorname{cotg} c)$

daher ist:

$\sin A \operatorname{cotg} p' = \sin A'' \operatorname{cotg} b + (\sin A \cos A'' - \cos A \sin A'') \operatorname{cotg} c;$

$$= \sin A'' \operatorname{cotg} b + \sin (A - A'') \operatorname{cotg} c,$$
$$= \sin A'' \operatorname{cotg} b + \sin A''' \operatorname{cotg} c;$$

3) Aus dem Dreiecke ADC erhält man

$$\operatorname{cotg} p' = \frac{\operatorname{cotg} C \sin \mathfrak{A}''' + \cos \mathfrak{A}''' \cos a'''}{\sin a'''}; \quad (\S.\ 14.)$$

aus dem Dreiecke ADB

$$\operatorname{cotg} p' = \frac{\operatorname{cotg} B \sin \mathfrak{A}'' + \cos \mathfrak{A}'' \cos a''}{\sin a''};$$

daher ist:

$$\frac{\operatorname{cotg} C \sin \mathfrak{A}''' + \cos \mathfrak{A}''' \cos a'''}{\sin a'''} = \frac{\operatorname{cotg} B \sin \mathfrak{A}'' + \cos \mathfrak{A}'' \cos a''}{\sin a''}$$

oder $\sin a'' (\operatorname{cotg} C \sin \mathfrak{A}''' + \cos \mathfrak{A}''' \cos a''')$
$= \sin a''' (\operatorname{cotg} B \sin \mathfrak{A}'' + \cos \mathfrak{A}'' \cos a'');$

daher $\sin a'' \cos a''' \cos \mathfrak{A}''' - \sin a''' \cos a'' \cos \mathfrak{A}''$
$= -\sin a'' \operatorname{cotg} C \sin \mathfrak{A}''' + \sin a''' \operatorname{cotg} B \sin \mathfrak{A}'';$

oder, wenn man für $\mathfrak{A}''$ substituirt $(\pi - \mathfrak{A}''')$,

$(\sin a'' \cos a''' + \sin a''' \cos a'') \cos \mathfrak{A}'''$
$= (\sin a''' \operatorname{cotg} B - \sin a''' \operatorname{cotg} C) \sin \mathfrak{A}''';$

daher:

$\sin (a'' + a''') \cos \mathfrak{A}''' = (\sin a''' \operatorname{cotg} B - \sin a''' \operatorname{cotg} C) \sin \mathfrak{A}''';$

endlich nach Division mit $\sin \mathfrak{A}'''$

$$\sin a . \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' = \sin a'' \operatorname{cotg} B - \sin a'' \operatorname{cotg} C.$$

4) In den Dreiecken ADC und ABC ist:

$$\cos b = \frac{\cos \mathfrak{A}''' + \cos A''' \cos C}{\sin A''' \sin C}; \text{ und}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}; \text{ daher ist}$$

$\sin A (\cos \mathfrak{A}''' + \cos A''' \cos C) = \sin A''' (\cos B + \cos A \cos C);$

oder

$\sin A \cos \mathfrak{A}''' = \sin A''' \cos B + \sin A''' \cos A \cos C - \sin A \cos A''' \cos C;$
$= \sin A''' \cos B - \sin (A - A''') \cos C;$
$= \sin A''' \cos B - \sin A'' \cos C;$

5) in den Dreiecken ADC und ADB ist:

$\cos b = \cos \mathfrak{A}''' \sin a''' \sin p' + \cos a''' \cos p';$ (φ)
$\cos c = \cos \mathfrak{A}'' \sin a'' \sin p' + \cos a'' \cos p';$

$$= -\cos \mathfrak{A}''' \sin a'' \sin p' + \cos a'' \cos p'; \quad (\psi)$$

Multiplizirt man die Gleichung (φ) mit $\cos a''$, (ψ) mit $\cos a'''$ und zieht dann diese von jener ab, so erhält man

$$\cos \mathfrak{A}''' \sin p' (\sin a'' \cos a''' + \cos a'' \sin a''')$$
$$= \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c; \text{ daher}$$
$$\cos \mathfrak{A}''' \sin a \sin p' = \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c.$$

6) In dem Dreiecke ADC ist

$$\operatorname{cotg} b \sin p' - \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A''' = \cos A''' \cos p'; \quad (\varphi)$$

in dem Dreiecke ADB

$$\operatorname{cotg} c \sin p' - \operatorname{cotg} \mathfrak{A}'' \sin A'' = \cos A'' \cos p';$$

oder $$\operatorname{cotg} c \sin p' + \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A'' = \cos A'' \cos p'; \quad (\psi)$$

Multiplizirt man (φ) mit $\cos A''$, (ψ) mit $\cos A'''$, so wird

$$\cos A'' (\operatorname{cotg} b \sin p' - \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A''')$$
$$= \cos A''' (\operatorname{cotg} c \sin p' + \operatorname{cotg} \mathfrak{A}'' \sin A'');$$

woraus $$\operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' (\sin A'' \cos A''' + \cos A'' \sin A''')$$
$$= \sin p' (\cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c)$$

oder $$\frac{\operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' \sin A}{\sin p'} = \cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c \text{ folgt.}$$

7) Aus den Dreiecken ABD und ACD erhält man

$$\sin \mathfrak{A}'' = \frac{\sin A'' \sin c}{\sin a''} \text{ und}$$

$$\sin \mathfrak{A}''' = \frac{\sin A''' \sin b}{\sin a'''};$$

Da $\sin \mathfrak{A}''' = \sin \mathfrak{A}''$ ist, so folgt hieraus:

$$\frac{\sin A'' \sin c}{\sin a''} = \frac{\sin A''' \sin b}{\sin a'''} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin A'' . \sin a'''}{\sin A''' . \sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

Anmerk. Wird der Bogen aus der Spitze B nach b gezogen, so ist in obigen Gleichungen a, A, $\mathfrak{A}$ gegen b, B, $\mathfrak{B}$ und die Marke $(')$ gegen $('')$ zu vertauschen. Geht der Bogen von C nach c, so verwandelt sich a, A, $\mathfrak{A}$, $(')$, in c, C, $\mathfrak{C}$, $(''')$ und umgekehrt.

Zus. In den Gleichungen 3, 4, 5, 6, sind die Pro-

portionen des §. 45. enthalten. Denn ist p' senkrecht auf a, so ist $\mathfrak{A}''' = \frac{1}{2}\pi$; also $\cos\mathfrak{A}''' = 0$; $\operatorname{cotg}\mathfrak{A}''' = 0$.

Die Gleichung (3) giebt dann

$$0 = \sin a''' \operatorname{cotg} B - \sin a'' \operatorname{cotg} C;\ \text{woraus}$$

$$\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\operatorname{cotg} B}{\operatorname{cotg} C} = \frac{\operatorname{tang} C}{\operatorname{tang} B}\ \text{folgt.}$$

In der vierten Gleichung wird dann

$$0 = \sin A''' \cos B - \sin A'' \cos B;\ \text{oder}$$

$$\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\cos B}{\cos C};$$

Aus der fünften erhält man

$$0 = \cos a'' \cos b - \cos a''' \cos c;\ \text{oder}$$

$$\frac{\cos a''}{\cos a'''} = \frac{\cos c}{\cos b};$$

Aus der sechsten:

$$0 = \cos A'' \operatorname{cotg} b - \cos A''' \operatorname{cotg} c,\ \text{oder}$$

$$\frac{\cos A''}{\cos A'''} = \frac{\operatorname{cotg} c}{\operatorname{cotg} b} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c}.$$

§. 50.

Wird der Winkel A durch den Bogen p' halbirt, so ist in obigen Gleichungen $A'' = A''' = \frac{1}{2}A$. Man erhält dann:

1) aus $\sin A \operatorname{cotg} p' = \sin A'' \operatorname{cotg} b + \sin A''' \operatorname{cotg} c$; (2.)

$$\sin A \operatorname{cotg} p' = \sin \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} b + \sin \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} c;\ \text{oder}$$

$$2\cos \tfrac{1}{2}A \operatorname{cotg} p' = \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c.$$

Für das halbirende p' ergiebt sich daher der einfache Ausdruck

$$\operatorname{cotg} p' = \frac{\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c}{2\cos \frac{1}{2}A}$$

$$= \frac{\sin(b+c)}{2\sin b \sin c \,.\, \cos \frac{1}{2}A}.$$

2) Die Gleichung No. 4 giebt in diesem Falle:

$$\sin A \cos \mathfrak{A}''' = \sin \tfrac{1}{2}A (\cos B - \cos C);\ \text{woraus}$$

$$2\cos \tfrac{1}{2}A \cos \mathfrak{A}''' = \cos B - \cos C$$

$$= 2\sin \tfrac{1}{2}(C+B) \sin \tfrac{1}{2}(C-B)\ \text{oder}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}A \cos \mathfrak{A}''' = \sin \tfrac{1}{2}(C+B) \sin \tfrac{1}{2}(C-B)\ \text{folgt.}$$

Für den Winkel $\mathfrak{A}'''$ erhält man also den Ausdruck

$$\cos\mathfrak{A}''' = \frac{\cos B - \cos C}{2\cos\frac{1}{2}A} = \frac{\sin\frac{1}{2}(C+B)\sin\frac{1}{2}(C-B)}{\cos\frac{1}{2}A}; \quad (\varphi)$$

Nach §. 34, (2.) ist $\frac{\cos A - \cos C}{1+\cos A} = \frac{\sin(c-b)}{\sin a}$; daraus ergiebt sich

$$\cos\mathfrak{A}''' = \frac{\sin(c-b)}{\sin a}\cdot\cos\tfrac{1}{2}A. \quad (\psi)$$

Aus beiden Formeln, (φ) und (ψ), geht hervor, daß von den Winkeln $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$, welche der den Winkel A halbirende Bogen p' an der Grundseite a bildet, der der kleineren Seite b, oder dem größeren Winkel C, zugekehrte $\mathfrak{A}'''$ ein spitzer Winkel ist.

3) Die sechste Gleichung vereinfacht sich in folgende:

$$\frac{\operatorname{cotg}\mathfrak{A}'''}{\sin p'} = \frac{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} c}{2\sin\frac{1}{2}A}$$

4) Aus der siebenten erhält man die Proportion:

$$\frac{\sin a'''}{\sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

Wenn also aus einem Winkel eines sphärischen Dreieckes nach der gegenüber liegenden Seite ein Bogen gezogen wird, der jenen Winkel halbirt, so verhalten sich die Sinus der ungetheilten Seiten wie die Sinus der anliegenden Abschnitte der getheilten Seite — eine Analogie zu dem planimetrischen Satze:

$$\frac{a'''}{a''} = \frac{b}{c}.$$

Zus. Für den Bogen p' erhält man in diesem Falle noch einen bemerkenswerthen Ausdruck mit Hülfe der Neperschen Formeln. In dem Dreiecke ABD ist nämlich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}p' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(c-a'')\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''+A'')}{\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''-A'')}; \quad (\text{§. 33, II.})$$

in dem Dreiecke ACD ist:

$$\tan\tfrac{1}{2}p' = \tan\tfrac{1}{2}(b+a''')\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{A}'''+A''')}{\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{A}'''-A''')};\ (\text{§. 33, I.})$$

$$= \tan\tfrac{1}{2}(b+a''')\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''-A''')}{\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''+A''')}.$$

Multiplizirt man beide Gleichungen, so erhält man:

$$\tan^2\tfrac{1}{2}p' = \tan\tfrac{1}{2}(c-a'')\tan\tfrac{1}{2}(b+a''')\frac{\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''+A'')\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''-A''')}{\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''+A''')\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''-A'')};$$

Iſt nun $A''_{..} = A'''_{..}$ ſo vereinfacht ſich dieſer Ausdruck in folgenden:

$$\tan^2\tfrac{1}{2}p' = \tan\tfrac{1}{2}(c-a'')\tan\tfrac{1}{2}(b+a''').$$

Da die Seiten b, $a''_{..}$ und c, $a'''_{..}$ auf einerlei Art um p' liegen, ſo wird auch

$$\tan^2\tfrac{1}{2}p' = \tan\tfrac{1}{2}(c+a'')\tan\tfrac{1}{2}(b-a''') \text{ ſein,}$$

was auch aus

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(c-a'')}{\tan\frac{1}{2}(c+a'')} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''-A'')}{\tan\frac{1}{2}(\mathfrak{A}''+A'')}\ (\text{§. 33.})$$

$$= \frac{\tan\frac{1}{2}(\mathfrak{A}'''-A''')}{\tan\frac{1}{2}(\mathfrak{A}'''+A''')}\ (\text{weil } A'''_{..}=A'')$$

$$= \frac{\tan\frac{1}{2}(b-a''')}{\tan\frac{1}{2}(b+a''')}\ (\text{§. 33.})$$

hervorgeht, einfacher aber aus obiger Proportion $\frac{\sin a'''}{\sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}$ folgt. Denn man erhält daraus ſogleich $\frac{\sin b - \sin a'''}{\sin b + \sin a'''} = \frac{\sin c - \sin a''}{\sin c - \sin a''}$; oder $\frac{\tan\frac{1}{2}(b-a''')}{\tan\frac{1}{2}(b+a''')} = \frac{\tan\frac{1}{2}(c-a'')}{\tan\frac{1}{2}(c+a'')}$ und hieraus

$$\tan\tfrac{1}{2}(c-a'')\tan\tfrac{1}{2}(b+a''') = \tan\tfrac{1}{2}(b-a''')\tan\tfrac{1}{2}(c+a'').$$

§. 51.

Wird der Bogen p' nach dem Mittelpunkte der Seite a gezogen, ſo wird in den Gleichungen des §. 49. $a'' = a'''$. Es ergiebt ſich dann

1) aus No. 7.

$$\frac{\sin A''}{\sin A'''} = \frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Wenn also aus einem Winkel eines sphärischen Dreieckes nach der Mitte der gegenüber liegenden Seite ein Bogen gezogen wird, so verhalten sich die Sinus der Abschnitte des getheilten Winkels wie die Sinus der ungetheilten Winkel.

2) Aus No. 1. erhält man

$$\sin a \cos p' = \sin \tfrac{1}{2} a \,(\cos b + \cos c)$$

daher

$$\cos p' = \frac{\cos b + \cos c}{2 \cos \tfrac{1}{2} a} = \frac{\sin (B + C) \cos \tfrac{1}{2} a}{\sin A};$$ (§. 34, 3.)

3) Aus No. 3. ergiebt sich

$$\sin a \operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' = \sin \tfrac{1}{2} a \,(\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C);$$ daher

$$\operatorname{cotg} \mathfrak{A}''' = \frac{\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} C}{2 \cos \tfrac{1}{2} a} = \frac{\sin (C - B)}{2 \sin C \sin B \cos \tfrac{1}{2} a};$$

Ist hier $C > B$, so ist $\operatorname{cotg} \mathfrak{A}'''$ positiv, also $\mathfrak{A}'''$ ein spitzer Winkel; ist umgekehrt $\mathfrak{A}''' < \frac{1}{2}\pi$, so muß $C > B$, also auch $c > b$ seyn. Von den Winkeln also, welche durch den aus der Spitze eines sphärischen Dreieckes nach der Mitte der Grundseite gezogenen Bogen an der Grundseite gebildet werden, steht der kleinere einer kleineren Seite gegenüber, und umgekehrt.

Zus. 1. Diesen von der Spitze nach der Mitte der Grundseite gehenden Bogen kann man die Achse des Dreieckes nennen, von deren größerer oder geringerer Neigung gegen die Grundseite die mehr oder weniger schiefe Lage des Dreieckes abhängt. Errichtet man in dem Mittelpunkte D der Grundseite BC ein Perpendikel DE (Fig. 10.), so ist das Dreieck um so schiefer, je größer der Winkel EDA — das Komplement von $\mathfrak{A}'''$ — ist. Es kann daher dieser zwischen der Achse AD und dem Perpendikel ED enthaltene Winkel

die Schiefe des Dreieckes genannt werden. Wird dieſelbe mit S bezeichnet, ſo iſt $S=\frac{1}{2}\pi-A'''$, daher:

$$\text{tang}\,S=\frac{\text{cotg}\,B-\text{cotg}\,C}{2\cos\frac{1}{2}a}$$

$$=\frac{\sin(C-B)}{2.\sin C.\sin B.\cos\frac{1}{2}a}. \quad (\varphi)$$

Iſt $C>B$, ſo iſt S poſitiv, d. h. das Dreieck iſt nach C oder b hin geneigt. Iſt $C<B$, ſo iſt S negativ, d. h. das Dreieck neigt ſich nach der entgegengeſetzten Seite, nach B oder c.

Der oben in (3.) ausgeſprochene Satz läßt ſich demnach ſo ausdrücken: Jedes ſphäriſche Dreieck iſt nach dem größeren Winkel oder — was daſſelbe iſt — nach der kleineren Seite hin geneigt.

Um die Schiefe des Dreieckes durch die Seiten deſſelben auszudrücken, hat man nach §. 34, 4.

$$\sin(C-B)=\frac{(\cos b-\cos c)}{2\sin^2\frac{1}{2}a}\sin A.$$

Dieſen Werth in (φ) ſubſtituirt und für $\sin A$, in B, $\sin C$ die Werthe $\frac{2g}{\sin b\sin c}$, $\frac{2g}{\sin a\sin c}$, $\frac{2g}{\sin a\sin b}$ geſetzt, giebt:

$$\text{tang}\,S=\frac{(\cos b-\cos a)\cos\frac{1}{2}a}{2g};$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b)\sin\frac{1}{2}(c-b).\cos\frac{1}{2}a}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}};$$

Zuſ. 2. Der Nenner des zweiten Theiles (g) läßt ſich nach der Formel $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ (§. 2, 68.) verwandeln, und man erhält

$$\text{tang}\,S=\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b)\sin\frac{1}{2}(c-b).\cos\frac{1}{2}a}{\sqrt{(\sin^2\frac{1}{2}(b+c)-\sin^2\frac{1}{2}a)(\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}(b-c))}}$$

Dividirt man hier Zähler und Nenner durch $\sin\frac{1}{2}(c+b)$ $\sin\frac{1}{2}(c-b)$ ſo erhält der Ausdruck die Form

$$\text{tang}\,S=\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\sqrt{\left(1-\frac{\sin^2\frac{1}{2}a}{\sin^2\frac{1}{2}(b+c)}\right)\left(\frac{\sin^2\frac{1}{2}a}{\sin^2\frac{1}{2}(b-c)}-1\right)}};$$

Ist die Grundseite a und der Umfang (a + b + c) unveränderlich — da dann auch (b + c) sich nicht ändert — so ändert sich tang S nur nach $\sin^2\frac{1}{2}(b-c)$. Daraus folgt:

Je größer bei gegebener Grundseite und gegebenem Umfange die Differenz der veränderlichen Seiten ist, desto schiefer steht das Dreieck; und umgekehrt, je schiefer unter denselben Umständen das Dreieck ist, desto größer ist die Differenz der veränderlichen Seiten.

Daß dabei auch die Differenz der an der Grundseite, also den veränderlichen Seiten gegenüber, liegenden Winkel mit der Schiefe zu und abnimmt folgt in Verbindung mit dem Gesagten aus

$$\tan\tfrac{1}{2}(C-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(c-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b)}\cot^1 C \quad (\S.\ 33.)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(c-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b)}\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}} \quad (\S.\ 28,\ 3.)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(c-b)}{\sin\frac{1}{2}(c+b)}\sqrt{\frac{\sin^2\frac{1}{2}(c+b)-\sin^2\frac{1}{2}a}{\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}(c-b)}};$$

Ist dagegen die Grundseite a und die Differenz der andern beiden Seiten unveränderlich, so nimmt die Schiefe zu oder ab, je nachdem die Summe der veränderlichen Seite ab oder zunimmt.

§. 52.

Zieht man von einem zweiten Winkelpunkte B nach der gegenüber liegenden Seite AC (Fig. 6.) einen zweiten Bogen BE, (p″), der sich mit dem ersten p′ in P schneidet, so lassen sich auf das Dreieck BAD, in welchem BP, (q″), ein Bogen wie oben p′ in ABC ist, die Gleichungen des §. 49. anwenden. Die Gleichung (7.)

$$\frac{\sin A''\sin a'''}{\sin A'''\sin a''}=\frac{\sin b}{\sin c}$$

auf das genannte Dreieck angewendet giebt, indem A″, A‴ mit B‴, B′; a″, a‴ mit r′, q′ (DP, PA) und b, c mit c, a″ vertauscht werden,

$$\frac{\sin B''' \sin q'}{\sin B' \sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''};$$

Sind D, E die Mittelpunkte der Seiten a, b ſo iſt:

1) $a'' = \frac{1}{2} a$; 2) $\frac{\sin B'''}{\sin B'} = \frac{\sin c}{\sin a}$; (§. 51, 1.)

Dieſe Werthe ſubſtituirt geben

$$\frac{\sin c . \sin q'}{\sin a . \sin r'} = \frac{\sin c}{\sin \frac{1}{2} a};$$

Daraus folgt für die Abſchnitte q', r' des Bogens p' die bemerkenswerthe Relation

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = 2 \cos \tfrac{1}{2} a.$$

Für die Abſchnitte q'', r'' des Bogens p'' iſt demnach

$$\frac{\sin q''}{\sin r''} = 2 \cos \tfrac{1}{2} b.$$

Bei ebnen Dreiecken iſt $\frac{q'}{r'} = 2$, welches Verhältniß aus $\frac{\sin q'}{\sin r'} = 2 \cos \frac{1}{2} a$ folgt, wenn die Seiten des ſphäriſchen Dreieckes unendlich klein angenommen werden.

Schneiden ſich die Bogen p', p''' ſo erhält man für die Abſchnitte derſelben ebenfalls

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = 2 \cos \tfrac{1}{2} a; \text{ und } \frac{\sin q'''}{\sin r'''} = 2 \cos \tfrac{1}{2} c.$$

Hieraus folgt der Satz:

Wenn aus den drei Winkelpunkten eines ſphäriſchen Dreieckes nach den Mittelpunkten der gegenüber liegenden Seiten Bogen gezogen werden ſo ſchneiden ſich dieſe in einem Punkte.

Denn bezeichnet man die Abſchnitte q', r', die der Durchſchnitt von p' mit p'' auf p' erzeugt, durch x, y; die durch den Schnitt von p' und p''' auf p' entſtandenen durch x', y'; ſo iſt:

1) $y = p' - x$; $y' = p' - x'$; und

2) $2 \cos \frac{1}{2} a = \frac{\sin x}{\sin (p' - x)} = \frac{\sin x'}{\sin (p' - x')}$;

Hieraus folgt wie §. 47 daß $x' = x$, also der Durchschnitt von p' mit p'' und der von p' mit p''' derselbe sein muß.

Zus. Die Gleichung 7. des §. 49.

$$\frac{\sin A'' \sin a'''}{\sin A''' \sin a''} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

auf die durch den Bogen p'' gebildeten Abschnitte bezogen giebt:

$$\frac{\sin B' \sin b''}{\sin B''' \sin b'} = \frac{\sin a}{\sin c};$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit der oben entwickelten

$$\frac{\sin B''' \sin q'}{\sin B' \sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''};$$

so erhält man $\frac{\sin b''' \sin q'}{\sin b' \sin r'} = \frac{\sin a}{\sin a''}$; oder

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin a . \sin b'}{\sin a'' \sin b'''}; \quad (\varphi)$$

Zieht man den dritten Bogen p''' durch den Durchschnittspunkt von p' und p'' so erhält man für p' und p''' das Resultat in (φ) durch Vertauschung von b gegen c und (''') gegen (''), also:

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin a . \sin c'}{\sin a''' \sin c''}; \quad (\psi)$$

Aus (φ) und (ψ) folgt

$$\sin a'' \sin b''' \sin c' = \sin a''' \sin b' \sin c'';$$

wo die Abschnitte a'', b''', c' des ersten Theiles von einander getrennt sind durch die des zweiten Theiles, so wie diese durch jene. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Wenn von den Winkelpunkten eines sphärischen Dreieckes durch einen beliebigen Punkt innerhalb desselben Bogen bis zu den gegenüber liegenden Seiten gezogen werden, so ist das Produkt aus den Sinus je drei von einander getrennter Seitenabschnitte dem Produkte der Sinus der übrigen Seitenabschnitte gleich.

Der Satz ist übrigens auch gültig, wenn der Punkt P,

in welchem ſich die von A, B, C gezogenen Bogen ſchneiden, nicht innerhalb des Dreieckes liegt, ſondern ein beliebiger Punkt der Kugelfläche iſt. Es tritt nur der Unterſchied ein, daß von den Abſchnitten der Seiten einige größer als die Seiten ſelbſt werden, indem die andern zu denſelben Seiten g[illegible]n Abſchnitte außerhalb fallen, die dann als negativ[illegible]trachten ſind.

Es ſei nämlich (Fig. 11.) P ein Punkt außerhalb des Dreieckes ABC, der entweder in einem der Nebendreiecke von ABC oder in einem der Gegendreiecke derſelben liegen muß. Er liege in dem Nebendreiecke ACB'. Zieht man durch P von A, B, C die Bogen APD, CPF, BEPB', ſo iſt in dem Dreiecke ACB' nach dem Erwieſenen

$$\sin CD . \sin B'F . \sin AE = \sin EC . \sin B'D . AF.$$

Nimmt man für B'F und B'D die Supplemente BF, BD, welche dieſelben Sinus haben, ſo iſt:

$$\sin CD . \sin BF . \sin AE = \sin EC . \sin BD . \sin AF;$$

In Bezug auf das Dreieck ABC iſt nun:

$$CD = -a''' ; \quad EC = b''' ;$$
$$BF = c'' ; \quad AD = a'' ;$$
$$AE = b' ; \quad AF = -c' ;$$

Daher $\sin(-a''') \sin c'' \sin b' = \sin b''' \sin a'' \sin(-c')$

folglich wie oben

$$\sin a''' \sin c'' \sin b' = \sin b''' \sin a'' \sin c'.$$

Liegt aber P in dem Gegendreiecke des Dreieckes ABC ſelbſt, oder eines der Nebendreiecke; ſo liegt deſſen Gegenpunkt P' innerhalb ABC oder eins der Nebendreiecke. Die von A, B, C durch P gezogenen Bogen gehen nun auch durch P' und man erhält alſo dieſelben Seitenabſchnitte, wie wenn man von A, B, C ſogleich durch P' zieht.

§. 53.

Werden die Winkel A, B durch p', p'' halbirt, ſo iſt in der allgemeinen Gleichung

$$\frac{\sin B'''.\sin q'}{\sin B'.\sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''} \quad (\S.\ 52.)$$

$B''' = B'$, daher ist dann $\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''}$;

Da b, a''' eben so an q', r' liegen, wie c, a'', so wird auch

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin b}{\sin a'''} \text{ sein;}$$

was übrigens schon aus $\frac{\sin a''}{\sin a'''} = \frac{\sin c}{\sin b}$ (§. 50, 4.) hervorgeht.

Für die Abschnitte q'', r'' hat man demnach

$$\frac{\sin q''}{\sin r''} = \frac{\sin c}{\sin b'} = \frac{\sin a}{\sin b'''};$$

Werden A, C durch p', p''' halbirt, so erhält man:

$$\frac{\sin q'}{\sin r'} = \frac{\sin c}{\sin a''} = \frac{\sin b}{\sin a'''};$$

$$\frac{\sin q'''}{\sin r'''} = \frac{\sin a}{\sin c''} = \frac{\sin b}{\sin c'};$$

woraus sich, wie §. 53. der Satz ergiebt, daß diejenigen drei Bogen, durch welche die Winkel des Dreieckes halbirt werden, sich in einem und demselben Punkte schneiden.

Zus. Nach der oft erwähnten Gleichung 7. des §. 49. ist für den Bogen p': $\frac{\sin a'''}{\sin a''} = \frac{\sin b \sin A'''}{\sin c \sin A''}$; (α)

Durch Verwechselung erhält man

für p'' $\frac{\sin b'}{\sin b'''} = \frac{\sin c.\sin B'}{\sin a.\sin B'''}$; (β)

für p''' $\frac{\sin c''}{\sin c'} = \frac{\sin a \sin C''}{\sin b \sin C'}$; (γ)

Multiplizirt man (α), (β), (γ), so erhält man

$$\frac{\sin a''' \sin b' \sin c''}{\sin a'' \sin b''' \sin c'} = \frac{\sin A''' \sin B' \sin C''}{\sin A'' \sin B''' \sin C'};$$

Nun ist nach dem Zus. des vorigen §.

$$\sin a''' \sin b' \sin c'' = \sin a'' \sin b''' \sin c';$$

daher ist auch $\sin A''' \sin B' \sin C'' = \sin A'' \sin B''' \sin C'$.

d Gleichung gültig iſt, wenn der Durchſchnitt P der en p′, p″, p‴ ein beliebiger Punkt der Kugelfläche iſt; geht aus dem §. 52, Zuſ. Geſagten hervor. Es ergiebt ſich hieraus der Satz:

Wenn von den Winkelpunkten eines ſphäriſchen Dreieckes durch einen beliebigen Punkt der Kugelfläche Bogen gezogen und bis zu den gegenüber ſtehenden Seiten oder deren Verlängerungen geführt werden, ſo iſt das Produkt der Sinus je drei von einander getrennter Winkelabſchnitte dem Produkte der Sinus der übrigen Winkelabſchnitte gleich.

§. 54.

Lehrſatz. Wenn in einem Nebenkreiſe zwei (ſphäriſche) Sehnen gezogen werden, die ſich ſchneiden, ſo verhalten ſich die Sinus der halben Differenzen, desgleichen die Sinus der halben Summen je zweier Abſchnitte, wie die Sinus der Hälften derjenigen Sehnen, durch welche die Endpunkte derſelben Abſchnitte verbunden werden.

Beweis. In dem Nebenkreiſe ABA′B′ (Fig. 12.) ziehe man zwei (ſphär.) Sehnen AA′, BB′, die ſich in C ſchneiden und verbinde die Abſchnitte CA, CB, ſo wie CA′, CB′ durch die Sehnen AB, C′B′. Zu beweiſen iſt, daß:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(AC-BC)}{\sin\frac{1}{2}(B'C-A'C)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(AC+BC)}{\sin\frac{1}{2}(B'C+A'C)} = \frac{\sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}A'B'}$$ ſei.

Zieht man noch die ſphär. Sehne BA′, ſo iſt in den auf der gemeinſchaftlichen Sehne BA′ liegenden Dreiecken BA′A und und BA′B′ nach g. S. §. 75.

$$ABA' + AA'B - BAA = B'BA' + B'A'B - BB'A'.$$

Zieht man auf beiden Seiten die gemeinſchaftlichen Theile

$$B'BA' + AA'B$$

ab, ſo ergiebt ſich $ABC - BAC = B'A'C - A'B'C$,

oder, wenn dieſe Winkel der Dreiecke ABC, A′B′C nach ihren Scheitelpunkten reſp. durch B, A, A′, B′ bezeichnet werden,

$$B-A=A'-B'.$$

Bezeichnet man in denſelben Dreiecken die Seiten AB, AC, BC durch c, b, a, ſo wie durch c′, b′, a′ die Seiten A′B′, A′C, B′C, ſo iſt nach §. 32, D.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}c};$$

und

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A'-B')}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

folglich, da $B-A=A'-B'$ iſt,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

oder

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

Ferner iſt

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}c}$$ (§. 32, A.)

und

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A'-B')}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

daher

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

oder

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

mithin

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

Zuſ. 1. Zieht man von dem Mittelpunkte M des Kreiſes den ſphär. Radius MA und auf die Sehne AB das Perpendikel MD, das verlängert in E auch den Nebenbogen AB halbirt; ſo iſt der Winkel $AME=\frac{AE}{\sin AM}$, weil $\sin AM$ der Halbmeſſer der Kreisebne ABA′B′ iſt. Der Quotient $\frac{AE}{\sin AM}$, der den relativen Werth des Bogens AE ausdrückt, ſei durch $\frac{1}{2}\gamma$ bezeichnet, indem γ den relativen

des Nebenbogens AB andeuten ſoll. In dem rechten Dreiecke AMD iſt nun $\sin AD = \sin AM \sin AMD$, oder wenn AD wieder durch $\frac{1}{2}c$, AM durch r bezeichnet und für AMD der Werth $\frac{1}{2}\gamma$ geſetzt wird,

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \sin r . \sin\tfrac{1}{2}\gamma.$$

Ebenſo iſt für die Sehne A′B′ $\sin\frac{1}{2}c' = \sin r \sin\frac{1}{2}\gamma'$, indem γ' den relativen Werth des Nebenbogens A′B′ bezeichnet. Daher iſt $\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma'}$; folglich nach dem Lehrſatze

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma'};$$

Zuſ. 2. Aus der Proportion $\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}$ folgt die andere: $\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}$

hieraus: $\frac{\tang\frac{1}{2}b - \tang\frac{1}{2}a}{\tang\frac{1}{2}b + \tang\frac{1}{2}a} = \frac{\tang\frac{1}{2}a' - \tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}a' + \tang\frac{1}{2}b'}$; (§. 2, 70.)

endlich $\tang\frac{1}{2}a \tang\frac{1}{2}a' = \tang\frac{1}{2}b \tang\frac{1}{2}b'$.

Zwiſchen den Abſchnitten zweier Sehnen findet alſo die merkwürdige Beziehung ſtatt, daß die Tangenten ihrer Hälften in umgekehrtem Verhältniſſe ſtehen, oder daß die Tangenten der halben Abſchnitte einer und derſelben Sehne ein eben ſo großes Produkt als die der andern Sehne geben — eine intereſſante Analogie der ſpäriſchen und der ebnen Kreisfläche!

Es folgt hieraus der g. S. §. 64, Zuſ. 2. bemerkte Satz, daß, wenn ein Abſchnitt der einen Sehne größer als ein Abſchnitt der andern iſt, der zweite Abſchnitt jener Sehne kleiner als der zweite der andern ſein muß.

Zuſ. 3. Wird eine von den Sehnen halbirt, etwa BB′, ſo iſt $a = a'$, daher

$$\tang^2\tfrac{1}{2}a = \tang^2\tfrac{1}{4}BB' = \tang\tfrac{1}{2}b \tang\tfrac{1}{2}b'.$$

Zieht man alſo durch einen beliebigen Punkt A innerhalb des Kreiſes mehrere Sehnen, (Fig. 13.) A′B′, A″B″, A‴B‴, ſo iſt:

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}AA'\,\text{tang}\tfrac{1}{2}AB' = \text{tang}\tfrac{1}{2}AA''\,\text{tang}\tfrac{1}{2}AB'' = \text{tang}\tfrac{1}{2}AA'''\,\text{tang}\tfrac{1}{2}AB''' = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}AC = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}BC$$

wo BC die Sehne ist, deren Mittelpunkt A, die also auf dem von A nach dem Mittelpunkte M des Kreises gezogenen Bogen AM senkrecht ist.

Zus. 4. Zieht man von einem beliebigen Punkte D der Peripherie eines Nebenkreises (Fig. 14.) auf den Durchmesser AB ein Perpendikel DC, das die Hälfte der Sehne DE ist, so ist:

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}DC = \text{tang}\tfrac{1}{2}AC.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}CB.$$

Es ist also die Tangente der Hälfte des Perpendikels, welches von der Peripherie eines Nebenkreises auf einen sphärischen Durchmesser desselben gefällt wird, die mittlere Proportionale zwischen den Tangenten der halben Abschnitte des Durchmessers.

Man vergleiche hiermit die Proportion im rechtwinkligen Dreiecke (§. 48.)

$$\sin^2 DC = \text{tang}\,AC.\,\text{tang}\,CB.$$

Zus. 5. Bezeichnet man das Perpendikel DC mit y, den sphär. Radius MA mit r, das Stück MC des Durchmessers AB mit x, so ist: $CB = r - x$; $AC = r + x$, daher nach vorigem Zusatze

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}y = \text{tang}\tfrac{1}{2}(r-x)\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(r+x);$$

Wird AC mit x' bezeichnet, so ist $CB = 2r - x'$; also

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}y = \text{tang}\tfrac{1}{2}x'\,\text{tang}\tfrac{1}{2}(2r-x'),$$

welche Formeln, wie die analogen der Planimetrie

$$y^2 = (r-x)(r+x) \text{ und } y^2 = x'(2r-x')$$

ähnliche Gleichungen des Kreises geben.

§. 55.

Lehrsatz. Wenn von einem Punkte außerhalb des Nebenkreises zwei sphärische Sekanten gezogen werden, so verhalten sich die Sinus der

den Differenz der Sekanten und der halben Differenz der äußeren Abſchnitte, desgleichen die Sinus der halben Summe der Sekanten und der halben Summe der äußeren Abſchnitte wie die Sinus der halben Bogen, durch welche die Endpunkte der Sekanten und die der äußern Abſchnitte verbunden werden.

Beweis. Man ziehe (Fig. 15.) von dem Punkte C die Sekanten CA, CB, deren äußere Abſchnitte CA', CB' ſind, und verbinde durch die Bogen AB, A'B' die beiderſeitigen Endpunkte. In dem Vierecke ABB'A' iſt nun $A+\beta = B+\alpha$; (g. S. §. 75., Zuſ. 3.). Bezeichnet man die Winkel CA'B', CB'A' durch A', B', ſo iſt $\alpha=\pi-A'$; $\beta=\pi-B'$, alſo

$$A+\pi-B'=B+\pi-A'; \text{ daher}$$
$$A-B=B'-A'$$

In dem Dreiecke ABC, deſſen Seiten AB, AC, BC durch c, b, a bezeichnet ſeien, iſt nun:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c};$$

in dem Dreiecke A'B'C, deſſen Seiten c', b', a' ſeien, iſt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B'-A')}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}{\sin\frac{1}{2}c'}.$$

Da $A-B=B'-A'$ iſt, ſo folgt hieraus:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}{\sin\frac{1}{2}c'}, \text{ oder}$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}.$$

Es iſt ferner in dem Dreiecke ABC

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c};$$

und in A'B'C $\frac{\cos\frac{1}{2}(B'-A')}{\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b'+a')}{\sin\frac{1}{2}c'}$;

daher $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b'+a')}{\sin\frac{1}{2}c'}$; oder $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$.

Folglich iſt $\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$.

Zuſ. 1. Werden die relativen Werthe der Nebenbogen AB, A'B' wieder durch γ, γ' bezeichnet, ſo iſt auch hier

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma'}.$$

Zuſ. 2. Auch hier ergiebt ſich aus

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b'+a')}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}$$

die merkwürdige Proportion $\frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\text{tang}\frac{1}{2}b} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}b'}{\text{tang}\frac{1}{2}a'}$ oder

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}a\,\text{tang}\tfrac{1}{2}a' = \text{tang}\tfrac{1}{2}b\,\text{tang}\tfrac{1}{2}b',$$

in Worten: Die Tangenten der halben ſphäriſchen Sekanten verhalten ſich umgekehrt, wie die Tangenten ihrer halben äußern Abſchnitte; oder: Wenn von einem Punkte der Kugelfläche nach einem Nebenkreiſe zwei oder mehrere ſphäriſche Sekanten gezogen werden, ſo ſind die Produkte aus den Tangenten der Hälfte jeder Sekante und ihres äußern Abſchnittes bei allen gleich.

Zuſ. 3. Zieht man von C an den Kreis einen Berührungsbogen (ſphäriſche Tangente) CD, der nichts anderes, als die äußerſte Sekante iſt, die mit ihrem äußeren Abſchnitte zuſammenfällt, ſo iſt:

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}CD = \text{tang}\tfrac{1}{2}a.\,\text{tang}\tfrac{1}{2}a'.$$

Es iſt alſo die Tangente des halben Berührungsbogens die mittlere Proportionale zwiſchen den Tangenten der Hälfte einer von demſelben Punkte aus gezogenen Sekante und des äußeren Abſchnittes derſelben.

Zuſ. 4. Zieht man von C aus die größte Sekante CA'', die durch den Mittelpunkt M des Kreiſes geht, und den kleinſten äußern Abſchnitt CB'' bildet und bezeichnet man den Abſtand CM mit x; den ſphäriſchen Radius MB'' mit r, den Berührungsbogen CD mit y, ſo iſt $CA'' = x+r$; $CB'' = x-r$; daher:

$\text{tang}^2\frac{1}{2}y = \text{tang}\frac{1}{2}(x-r)\,\text{tang}\frac{1}{2}(x+r)$.

Ist x' bezeichnet, so ist $CA'' = 2r + x'$ und

$\text{tang}^2\frac{1}{2}y = \text{tang}\frac{1}{2}x'\,\text{tang}\frac{1}{2}(2r+x')$.

§. 56.

Aufgabe. Zwei Gegenkreiſe zu konſtruiren, von denen der eine durch zwei Winkelpunkte eines ſphäriſchen Dreieckes geht, der andere aber die jenen Winkelpunkten gegenüber liegenden Seiten des Dreieckes ſchneidet.

Auflöſung. Es ſei ABC (Fig. 16.) ein ſphäriſches Dreieck, und A, B ſeien die Punkte, durch welche einer von den zu konſtruirenden Kreiſen geht, deſſen Gegenkreis die Seiten AC, BC ſchneiden ſoll. Man ziehe durch den Mittelpunkt D der Seite AB ſenkrecht einen Hauptkreis, in welchem ſich die Mittelpunkte M, M' der Gegenkreiſe befinden, zwiſchen den das Dreieck liegt (g. S. §. 61, Zuſ. 2.). Nimmt man nun auf dieſem Perpendikel MDM' unterhalb M einen beliebigen Punkt m, doch ſo, daß mD, folglich auch $mA < \frac{1}{2}\pi$ iſt; beſchreibt um denſelben mit dem Radius Am einen Kreis und mit demſelben Radius um den Gegenpunkt m' den Gegenkreis deſſelben; ſo ſchneidet der letztere die Seiten AC, BC.

Beweis I. Sollte der um m' beſchriebene Kreis die Seiten AC, BC nicht ſchneiden, ſo müßte er über der Spitze C vorbeigehen, da er wegen g. S. §. 79, Zuſ. nicht durch C gehen kann. Man verlängere alsdann die Seite BC, die den Kreis in F' treffe und ziehe AF'. Das Dreieck ABF' liegt dann zwiſchen den um m, m' beſchriebenen Gegenkreiſen und iſt größer als ABC. Nun iſt nach g. S. §. 78. der Winkel DAM das Komplement des halben Flächenraumes von ABC, ſo wie DAm von ABF', alſo:

$$\tfrac{1}{2}ABC = \tfrac{1}{2}\pi - DAM;$$

$$\tfrac{1}{2}ABF' = \tfrac{1}{2}\pi - DAm;$$

Da $ABF' > ABC$ iſt, ſo müßte $DAM > DAm$ ſein; was

offenbar unmöglich ist, daher muß der um m' beschriebene Kreis die Seiten AC, BC schneiden.

Liegt der Mittelpunkt M nicht unter AB, wie in der Figur, so ergeben dieselben Schlüsse die Richtigkeit der Auflösung.

Beweis II. Da (Fig. 17a) $Dm < \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist die Hypotenuse $Am > Dm$; dagegen ist, wenn d den Durchschnitt des um M mit dem Radius AM beschriebenen Kreises und des Perpendikels MDM' bezeichnet — $Am < md$, weil md der größte Bogen von m nach der Peripherie des Kreises AdB ist (g. S. §. 64.). Der um m mit dem Radius Am beschriebene und durch A, B gehende Kreis A∂B schneidet also das Perpendikel MDM' in einem Punkte ∂ zwischen D und d. Nimmt man nun $M'm' = Mm$, $M'\partial' = M\partial$ und $M'd' = Md$, so sind m', ∂', d' die Gegenpunkte von m, ∂, d und der um m' mit dem Radius Am beschriebene Gegenkreis von A∂B geht durch die Gegenpunkte A', ∂', B' von A, ∂, B, während der Gegenkreis von AdB durch A', B', d' und durch die Spitze C des Dreieckes ABC, dessen Gegenkreise AdB, A'd'B' sind, geht. Indem also der Bogen A'∂'B' innerhalb des Kreises A'd'B' liegt, ist der übrige Theil A'FEB' des um m' beschriebenen Kreises zwischen den Gegenkreisen AdB, A'd'B'C enthalten, der also nothwendig die Bogen AC, BC in zwei Punkte E, F schneiden muß.

Anmerk. In Fig. 17. b, ist dieselbe Konstruktion auf der Kugelfläche dargestellt.

Zus. 1. Bei der beliebigen Lage des Punktes m genügen unzählige Gegenkreise der Aufgabe, die daher noch eine Bestimmung erhalten kann. Soll z. B. der schneidende Gegenkreis die Seite BC in dem gegebenen Punkte F treffen, so hat man die Gegenkreise des Dreieckes ABF zu konstruiren, die dann völlig bestimmt sind.

Zus. 2. Nimmt man zwischen m und M einen Punkt n, (Fig. 17a.) dessen Gegenpunkt n' zwischen m' und M' liegt, so ist $An < Am$, jedoch $> AM$. Der um n' mit dem

Radius An beschriebene Kreis trifft also die Seiten AC, BC zwischen E, F und C. Je näher also m an M kommt, desto kleiner werden die Abschnitte EC, FC. Fällt m mit M, also die Gegenkreise um m, m' mit den um M, M' beschriebenen Gegenkreisen zusammen, so gehen E, F in C zusammen; die obern Abschnitte werden also Null. Rückt m über M hinaus, so erreicht der um m' beschriebene Gegenkreis die Seiten AC, BC nicht mehr, die also verlängert werden müssen, wenn Durchschnitte erfolgen sollen. Solche Verlängerungen seien CF', CE' Fig. 16. Da die Richtungen von CF', CE' entgegengesetzt denen von CF, CE sind, so wie auch die Richtung des den Bogen AC mit BC verbindenden Nebenbogens E'F' entgegengesetzt ist der Richtung des die entgegengesetzten Seiten derselben Bogen verbindenden Nebenbogens EF; so können die Verlängerungen CE', CF' als negative Abschnitte und der Verbindungsbogen E'F' der Verlängerungen als ein negativer Verbindungsbogen von Abschnitten betrachtet werden.

§. 57.

Lehrsatz. Wenn zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes durch einen Nebenkreis, dessen Gegenkreis durch die jenen Seiten gegenüber liegenden Winkelpunkte des Dreieckes geht, geschnitten und die Durchschnittspunkte durch einen (Haupt-) Bogen verbunden werden; so stehen.

1) die Sinus der halben Differenzen der getheilten Seiten und der oberen Abschnitte derselben;

2) die Sinus der halben Summen derselben Seiten und derselben Abschnitte;

3) die Sinus der halben dritten Seite und des halben Verbindungsbogens der Durchschnittspunkte in gleichem Verhältnisse.

Beweis. Es sei (Fig. 18.) A'B'A''B'' der Kreis, der

die Seiten AC, BC des Dreieckes ABC in A′, B′ schneidet, während der Gegenkreis desselben durch A, B geht. Verlängert man über C hinaus die Seiten AC, BC, die in A″, B″ zum zweitenmale den Kreis schneiden, so ist nach §. 54.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CB''-CA'')}{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CB''+CA'')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}A''B''}{\sin\frac{1}{2}A'B'}.$$

Da die Punkte A, B in der Peripherie des unteren Gegenkreises liegen, so sind A″, B″ die Gegenpunkte von A, B; daher der Bogen $A''B''=AB$, $CA''=\pi-CA$; $CB''=\pi-CB$; mithin $CB''-CA''=CA-CB$ und $CB''+CA''=2\pi-(CA+CB)$

folglich $\frac{\sin\frac{1}{2}(CA-CB)}{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CA+CB)}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}A'B'}$,

oder, wenn CB, CA, AB, durch a, b, c; die obern Abschnitte CA′, CB′ durch b′, a′ und A′B′ durch c′ bezeichnet wird,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b'-a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}.$$

Zus. 1. Für $\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$ kann wieder $\frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\gamma'}$ gesetzt werden, indem γ', γ die relativen Werthe der Nebenbogen A′B′, AB (=A″B″) bedeuten.

Zus. 2. Aus $\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}$ folgt wie §. 54 und 55. die Proportion

$$\frac{\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}a} = \frac{\tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}b},$$

in Worten: Die Tangenten der halben obern Abschnitte sind proportionirt den Tangenten der halben Seiten.

Zus. 3. Aus $\frac{\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}a} = \frac{\tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}b}$ folgt

$$\frac{\tang\frac{1}{2}a-\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}a+\tang\frac{1}{2}a'} = \frac{\tang\frac{1}{2}b-\tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}b+\tang\frac{1}{2}b'}$$

und hieraus, indem Zähler und Nenner respektive mit $\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a'$ und $\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b'$ multiplizirt werden:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-a')}{\sin\frac{1}{2}(a+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-b')}{\sin\frac{1}{2}(b+b')}$$

wo $a-a'$ und $b-b'$ die untern Abschnitte der Seiten a, b sind.

Es verhalten sich also die Sinus der halben untern Abschnitte wie die Sinus der halben Summen aus jeder Seite und ihrem obern Abschnitte.

Zus. 4. Werden zwei Seiten AC, BC (Fig. 19.a.) über die Spitze C verlängert und in A', B' von einem Nebenkreise, dessen Gegenkreis durch A, B geht, geschnitten, so ist dieser Fall in dem Lehrsatze enthalten, insofern die Verlängerungen A'C, B'C so wie der Verbindungsbogen A'B', als negativ betrachtet werden. In den obigen Proportionen ist daher in diesem Falle für a', b', c' zu setzen: $-B'C$ $-A'C$, $-A'B'$ und man erhält

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA-CB)}{\sin\frac{1}{2}(-CA'+CB)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CA+CB)}{\sin\frac{1}{2}(-CA'-CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}(-A'B')}$$

daher wie oben

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA-CB)}{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CA+CB)}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}AB}{\sin\frac{1}{2}A'B'}$$

Dasselbe läßt sich direkt aus §. 55. erweisen, denn verlängert man (Fig. 19.b) die Bogen CB', CA' bis zum zweiten Durchschnitte B'', A'' mit dem schneidenden Kreise, so ist nach §. 55.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CB'-CA')}{\sin\frac{1}{2}(CA''-CB'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CB'+CA')}{\sin\frac{1}{2}(CA''+CB'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}A'B'}{\sin\frac{1}{2}A''B''}$$

Da nun A'', B'' die Gegenpunkte von A, B sind, so ist $CA''=\pi-AC$; $CB''=\pi-BC$ und $A''B''=AB$, daher $CA''-CB''=CB-CA$ und $CA''+CB''=2\pi-(AC+BC)$, folglich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CB'-CA')}{\sin\frac{1}{2}(CB-CA)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(CB'+CA')}{\sin\frac{1}{2}(CB+CA)} = \frac{\sin\frac{1}{2}A'B'}{\sin\frac{1}{2}AB}.$$

Daher ist der Lehrsatz mit den daraus gezogenen Folgerungen gültig, der schneidende Kreis mag

die Seiten des Dreieckes unmittelbar, oder ihre Verlängerungen treffen.

Zuſ. 5. Da $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$ (§. 32.) und nach derſelben Formel in dem Dreiecke A'B'C (Fig. 18.)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}c'} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A'-B')}{\cos\frac{1}{2}C'} \text{ iſt;}$$

ſo folgt aus

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'} \text{ oder } \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}c'}$$

daß auch $\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A'-B')}{\cos\frac{1}{2}C'}$, alſo daß $A-B = A'-B'$ iſt. Daſſelbe ergiebt ſich aus einer einfachen Betrachtung. Denn in den Dreiecken A'B'C, A''B''C iſt nach §. 54.

$$A'-B' = B''-A'',$$

Das Dreieck A''B''C aber, da A'', B'' die Gegenpunkte von A, B ſind, iſt nichts anderes, als das Gegen-Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}\bar{\beta}\gamma\\ \bar{a}\bar{b}c\\ \bar{A}\bar{B}C\end{matrix}\right\}$, in welchem die Winkel A'', B'' die Supplemente von A, B ſind. Aus $A'-B' = B''-A'' = (\pi-B)-(\pi-A)$ folgt nun: $A'-B' = A-B$.

Beiläufig ergiebt ſich hieraus, daß $B+\pi-B' = A+\pi-A'$ iſt; wo $\pi-B'$, $\pi-A'$ die Nebenwinkel von B', A', alſo die Winkel BB'A', AA'B' des ſphäriſchen Trapezes ABA'B' ſind. Im ſphäriſchen Trapeze geben alſo die Winkel an jeder der beiden Seiten, welche nicht in den Gegenkreiſen des Trapezes liegen, gleiche Summen.

Zuſ. 6. 1) Aus $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$ folgt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)+\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b')+\sin\frac{1}{2}c'}{\sin\frac{1}{2}c'};$$

daher

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cos\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b'+c')\cos\frac{1}{2}(a'+b'-c')}{\sin\frac{1}{2}c'}; \quad (\alpha)$$

Eben so ist $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)-\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b')-\sin\frac{1}{2}c'}{\sin\frac{1}{2}c'}$

daher

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{4}(a'+b'+c')\sin\frac{1}{4}(a'+b'-c')}{\sin\frac{1}{2}c'};\ (\beta)$$

Wie $\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$; so ist auch

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}.$$

In (α) und (β) kann daher b, b' gegen (—b), (—b') vertauscht werden, um sogleich das Resultat der eben so behandelten Gleichung $\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}=\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}c'}$ zu erhalten.

Dies giebt:

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(a+c-b)\cos\frac{1}{4}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{4}(a'+c'-b')\cos\frac{1}{4}(b'+c'-a')}{\sin\frac{1}{2}c'};\ (\gamma)$$

$$\frac{\cos\frac{1}{4}(a+c-b)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{4}(a'+c'-b')\sin\frac{1}{4}(b'+c'-a')}{\sin\frac{1}{2}c'};\ (\delta)$$

2) Dividirt man (α) durch (β) und (γ) durch (δ), so erhält man:

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(a+b+c)}{\tang\frac{1}{4}(a+b-c)}=\frac{\tang\frac{1}{4}(a'+b'+c')}{\tang\frac{1}{4}(a'+b'-c')};\ (\varepsilon)$$

$$\frac{\tang\frac{1}{4}(c+a-b)}{\tang\frac{1}{4}(c+b-a)}=\frac{\tang\frac{1}{4}(c'+a'-b')}{\tang\frac{1}{4}(c'+b'-a')};\ (\zeta)$$

Multiplizirt man (α) mit β und (γ) mit (δ) so ergiebt sich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin^2\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b'+c')\sin\frac{1}{2}(a'+b'-c')}{\sin^2\frac{1}{2}c'};\ (\eta)$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}{\sin^2\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(c'+b'-a')\sin\frac{1}{2}(c'+a'-b')}{\sin^2\frac{1}{2}c'};\ (\vartheta)$$

Durch Division von (η) durch (ϑ) folgt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b'+c')\sin\frac{1}{2}(a'+b'-c')}{\sin\frac{1}{2}(c'+b'-c')\sin\frac{1}{2}(c'+a'-b')};$$

Durch Multiplikation:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin^4\frac{1}{2}c} =$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a'+b'+c')\sin\frac{1}{2}(a'+b'-c')\sin\frac{1}{2}(a'+c'-b')\sin\frac{1}{2}(b'+c'-a')}{\sin^4\frac{1}{2}c};$$

oder, wenn g, g' in der §. 28 angegebenen Bedeutung genommen werden,

$$\frac{g^2}{\sin^4\frac{1}{2}c} = \frac{g'^2}{\sin^4\frac{1}{2}c'} \text{ daher } \frac{g}{\sin^2\frac{1}{2}c} = \frac{g'}{\sin^2\frac{1}{2}c'}.$$

3) Werden die Flächenräume der Dreiecke ABC, A'B'C durch T, T' bezeichnet, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \frac{g}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \quad (\S.\ 41.)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}T' = \frac{g'}{2\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}b'\cos\frac{1}{2}c'}; \text{ daher}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{2}T'} = \frac{g}{g'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}b'\cos\frac{1}{2}c'}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$
$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}c'}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c'}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Aus den Proportionen in (ε), (ζ) folgt: wenn

$\tan\frac{1}{4}(a+b-c) = k.\tan\frac{1}{4}(a+b+c)$; und

$\tan\frac{1}{4}(a+c-b) = k'\tan\frac{1}{4}(b+c-a)$ ist, so ist auch

$\tan\frac{1}{4}(a'+b'-c') = k\tan\frac{1}{4}(a'+b'+c')$ und

$\tan\frac{1}{4}(a'+c'-b') = k'\tan\frac{1}{4}(b'+c'-a')$;

daher:

$\tan\frac{1}{4}(a+b+c)\tan\frac{1}{4}(a+b-c)\tan\frac{1}{4}(a+c-b)\tan\frac{1}{4}(b+c-a) =$
$kk'\tan^2\frac{1}{4}(a+b+c)\tan^2\frac{1}{4}(b+c-a)$; und

$\tan\frac{1}{4}(a'+b'+c')\tan\frac{1}{4}(a'+b'-c')\tan\frac{1}{4}(a'+c'-b')\tan\frac{1}{4}(b'+c'-a')$
$= kk'\tan^2\frac{1}{4}(a'+b'+c')\tan^2\frac{1}{4}(b+c-a)$

folglich ist:

$$\frac{\tan^2\frac{1}{4}T}{\tan^2\frac{1}{4}T'} = \frac{\tan^2\frac{1}{4}(a+b+c)\tan^2\frac{1}{4}(b+c-a)}{\tan^2\frac{1}{4}(a'+b'+c')\tan^2\frac{1}{4}(b'+c'-a')} \quad (\S.\ 41.)$$

oder $\dfrac{\tan\frac{1}{4}T}{\tan\frac{1}{4}T'} = \dfrac{\tan\frac{1}{4}(a+b+c)\tan\frac{1}{4}(b+c-a)}{\tan\frac{1}{4}(a'+b'+c')\tan\frac{1}{4}(b'+c'-a')}$.

Jenachdem man in (ε) oder (ζ) oder in beiden zugleich die Nenner und Zähler verwechselt, erhält man:

$$\frac{T}{T'} = \frac{\tang\frac{1}{4}(a+b-c)\tang\frac{1}{4}(b+c-a)}{\tang\frac{1}{4}(a'+b'-c')\tang\frac{1}{4}(b'+c'-a')};$$

$$= \frac{\tang\frac{1}{4}(a+b+c)\tang\frac{1}{4}(a+c-b)}{\tang\frac{1}{4}(a'+b'+c')\tang\frac{1}{4}(a'+c'-b')};$$

$$= \frac{\tang\frac{1}{4}(a+c-b)\tang\frac{1}{4}(a+b-c)}{\tang\frac{1}{4}(a'+c'-b')\tang\frac{1}{4}(a'+b-c')};$$

Da A− =A′—B′ ist, so können diese Proportionen auch aus §. bequem hergeleitet werden.

4) die Dreiecke ABC, A′B′C den Winkel C gemein haben, so ist $\sin C = \frac{2g'}{\sin a' \sin b}$; daher:

$$\frac{\sin}{\sin a} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}c'}.$$

Aus $\sin B = \frac{2}{\sin}$ $B' = \frac{2g'}{\sin a' \sin c'}$ folgt

$$\frac{\sin B}{\sin B'} = \frac{g}{g'} \quad \sin \qquad \frac{\sin a' \sin c'}{\sin a \sin c} = \frac{\tang\frac{1}{2}c \sin a'}{\tang\frac{1}{2}c' \sin a};$$

Hieraus

$$\frac{\tang\frac{1}{2}c}{\tang\frac{1}{2}c'} = \frac{\sin B \sin a}{\sin B' \sin a'} = \frac{\sin A \sin b}{\sin A' \sin a'}.$$

Für das Perpendikel p‴, welches von C auf c gefällt wird, ist nach §. 45 $\sin p''' = \sin B \sin a = \sin A \sin b$. Das Perpendikel in dem Dreiecke A′B′C von C auf c′ sey durch p‴ bezeichnet, so ist auch $\sin p''' = \sin B' \sin a'$; daher ist:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}c}{\tang\frac{1}{2}c'} = \frac{\sin p'''}{\sin p'''}$$

Zuſ. 7. Die Seiten a; b können durch den ſchneidenden Kreis nicht beide zugleich halbirt werden. Denn wäre $a' = \frac{1}{2}a$; $b' = \frac{1}{2}b$; ſo würde aus

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'-b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')} \text{ folgen}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{4}(a-b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{4}(a+b)}; \text{ und hieraus}$$

$$\cos\tfrac{1}{4}(a-b) = \cos\tfrac{1}{4}(a+b).$$

Alſo müßte a—b=a+b ſein, was nicht möglich iſt.

§. 58.

Lehrſatz. Wenn zwei Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes durch einen Parallelkreis der Gegenkreiſe, zwiſchen denen das Dreieck liegt, geſchnitten werden; ſo verhalten ſich die Sinus der halben Differenz und der halben Summe der oberen Abſchnitte wie die Sinus der halben Differenz und der halben Summe der untern Abſchnitte.

Beweis. Es ſeien M, M′ (Fig. 20.) die Mittelpunkte der Gegenkreiſe ABC′, A″B″C, zwiſchen denen das Dreieck ABC liegt. Um M und M′ beſchreibe man mit einem Radius, der größer als der der genannten Kreiſe iſt, die Gegenkreiſe abc, a′b′A′B′, welche in a, b und A′, B′ die Seiten AC, BC des Dreieckes ſchneiden. Verlängert man die obern Abſchnitte A′C, B′C, ſo daß ſie in A″, B″ den inneren, in a′, b′ den äußeren Kreis ſchneiden; ſo iſt nach §. 54

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(Cb''-Ca')}{\sin\frac{1}{2}(Cb'+Ca')}.$$

Da a′, b′ die Gegenpunkte von a, b ſind, ſo iſt:

$Ca'=\pi-Ca$; und $Cb'=\pi-Cb$; daher

$Cb'-Ca'=Ca-Cb$; und $Cb'+Ca'=2\pi-(Ca+Cb)$; folglich:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')}=\frac{\sin\frac{1}{2}(Ca-Cb)}{\sin\frac{1}{2}(Ca+Cb)};$$

Da ferner A″, B″ die Gegenpunkte von A, B ſind, ſo iſt $AA''=\pi=aa'$; folglich nach Abzug von aA″, der Abſchnitt $Aa=A''a'$. Eben ſo iſt $Bb=B''b'$. Nun iſt auch $A'C=A''a$; denn das Perpendikel M′D vom Mittelpunkte M′ auf die Sehnen A′a′ und CA″ halbirt beide, giebt alſo $A'D=Da'$ und $CD=DA''$, woraus $A'C=A''a'$ folgt. Eben ſo iſt $B'C=B''b'$. Hieraus und aus $Aa=A''a'$; $Bb=B''b'$ folgt, daß $Aa=A'C$; $Bb=B'C$, mithin auch $Ca=AA'$; $Cb=BB'$ iſt. Setzt man demnach für Ca, Cb die untern Abſchnitte AA′, BB′ in obiger Proportion, ſo erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(AA'-BB')}{\sin\frac{1}{2}(AA'+BB')},$$

oder, wenn die obern Abſchnitte mit a', b' die untern mit a'', b'' bezeichnet werden,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(b'-a')}{\sin\frac{1}{2}(b'+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b''-a'')}{\sin\frac{1}{2}(b''+a'')}.$$

Zuſ. 1. Aus dieſer Proportion folgt wieder

$$\frac{\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}b'} = \frac{\tang\frac{1}{2}a''}{\tang\frac{1}{2}b''};$$

in Worten: **Die Tangenten der halben oberen Abſchnitte ſind proportionirt der Tangenten der halben untern Abſchnitte.**

Zuſ. 2. Aus $\frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b)}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a''-b'')}{\sin\frac{1}{2}(a''+b'')}$ folgt die Proportion $\frac{\sin\frac{1}{2}(a''-a')}{\sin\frac{1}{2}(a''+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b''-b')}{\sin\frac{1}{2}(b''+b')}$. Denn zunächſt folgt daraus $\frac{\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}b'} = \frac{\tang\frac{1}{2}a''}{\tang\frac{1}{2}b''}$; hieraus

$$\frac{\tang\frac{1}{2}a''-\tang\frac{1}{2}a'}{\tang\frac{1}{2}a''+\tang\frac{1}{2}a'} = \frac{\tang\frac{1}{2}b''-\tang\frac{1}{2}b'}{\tang\frac{1}{2}b''+\tang\frac{1}{2}b'}$$ und hieraus

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a''-a)}{\sin\frac{1}{2}(a''+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b''-b')}{\sin\frac{1}{2}(b''+b')}.$$

Da $a''+a'=a$; $b''+b'=b$ iſt; ſo hat man die Proportion $\frac{\sin\frac{1}{2}(a''-a')}{\sin\frac{1}{2}a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(b''-b')}{\sin\frac{1}{2}b}$;

in Worten: **Die Sinus der halben Differenzen der obern und untern Abſchnitte ſind proportionirt den Sinus der halben Seiten, zu denen die Abſchnitte gehören.**

Zuſ. 3. Die zwiſchen den Gegenkreiſen eines ſphäriſchen Dreieckes liegenden Seiten deſſelben können offenbar nur von ſolchen Parallelkreiſen jener Gegenkreiſe geſchnitten werden, die größer als jene ſind. Die kleineren Parallelkreiſe treffen zwar die bezeichneten Seiten des Dreieckes nicht, ſchneiden aber deren Verlängerungen, die als negative Ab-

schnitte betrachtet werden können. Es seien Fig. 21. ABC', A''B''C die Gegenkreise des Dreieckes ABC, dessen Seiten AC, BC verlängert in A', B' von dem inneren Parallelkreise A'B'b'a' geschnitten werden. Die obigen Proportionen sind nun für diesen Fall gültig, insofern $a' = -CB'$; $b' = -CA'$ genommen wird. Daher ist hier

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(-CA'+CB')}{\sin\frac{1}{2}(-CA'-CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(AA'-BB')}{\sin\frac{1}{2}(AA'+BB')},$$

oder, wenn Zähler und Nenner des ersten Theiles entgegengesetzt genommen werden

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(CA'-CB')}{\sin\frac{1}{2}(CA'+CB')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(AA'-BB')}{\sin\frac{1}{2}(AA'+BB')};$$

Ebenso: $\frac{\tang\frac{1}{2}CA'}{\tang\frac{1}{2}CB'} = \frac{\tang\frac{1}{2}AA'}{\tang\frac{1}{2}BB'}$

und $\frac{\sin\frac{1}{2}aA'}{\sin\frac{1}{2}AC} = \frac{\sin\frac{1}{2}bB'}{\sin\frac{1}{2}BC}$ oder $\frac{\sin\frac{1}{2}AC}{\sin\frac{1}{2}BC} = \frac{\sin\frac{1}{2}aA'}{\sin\frac{1}{2}bB'}$;

Demnach ist der Lehrsatz gültig, wenn für die obern Abschnitte, Verlängerungen und für die untern Abschnitte, die Summen aus den ganzen Seiten und deren Verlängerungen genommen werden.

Zus. 4. Da die Abschnitte CA' und Aa, so wie CB' und Bb gleich sind, wie groß auch die schneidenden Gegenkreise sein mögen, so muß der Hauptkreis, dessen Pole M, M' sind, die Seiten AC, BC beide halbiren.

Bestimmung der um, in und an sphärische Dreiecke beschriebenen Kreise und Gegenkreise, so wie des Flächenraumes sphärischer Dreiecke und Vierecke nach ihrer Lage zwischen Gegenkreisen.

§. 59.

Aufgabe. Den sphärischen Radius des um ein sphärisches Dreieck beschriebenen Kreises durch die Stücke des Dreieckes auszudrücken.

Auflöſ. Es ſei M (Fig. 22.) der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beſchriebenen Kreiſes. Man ziehe den ſphär Radius MB und auf BC das Perpendikel MD, durch jes die Sehne BC halbirt wird; ſo iſt der Winkel $MBD = \frac{1}{2}(B+C-A)$ (g. S. §. 75.). In dem rechtwinkligen Dreiecke MDB iſt nun:

$$\text{tang}\, MB = \frac{\text{tang}\, BD}{\cos MBD}.$$

Bezeichnet man den Radius MB mit r, die Seite BC mit a, alſo BD mit $\frac{1}{2}a$, ſo iſt:

$$\text{tang}\, r = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}; \quad (1.)$$

Eben ſo iſt: $\text{tang}\, r = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$;

da nach §. 31, VII.

$$\frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)} \text{ iſt.}$$

Um r durch die Seiten des Dreieckes auszudrücken, hat man (§. 31.) die Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \frac{g}{2\cos\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c};$$

Dieſen Ausdruck für $\cos\frac{1}{2}(B+C-A)$ in (1.) ſubſtituirt, giebt $\text{tang}\, r =$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}} \quad (2.)$$

Durch die Winkel des Dreieckes erhält man r ausgedrückt, wenn man in (1.) für $\text{tang}\, \frac{1}{2}a$ den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}} \quad (\text{§. } 29,\ 3.)$$

ſubſtituirt. Dadurch ergiebt ſich

$$\text{tang}\, r = \sqrt{\frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}}$$

$$= \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}$$

$$= \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{G} = \frac{\sin\frac{1}{2}T}{G}; \quad (3.)$$

Anmerk. 1. Die hier sich darbietende Relation

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{g} = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{G}$$

oder $$\frac{g}{G} = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}$$

läßt sich aus der für $-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)$ oben erwähnten Formel mit Rücksicht auf $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{g}{G}$ sogleich herleiten.

Anmerk. 2. Die §. 31, VII. entwickelte Relation

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$$

erhält hier mehr Bedeutung, da durch diese Quotienten der umgeschriebene Kreis bestimmt wird. Wenn diese Quotienten an die ähnlichen $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$ erinnern, so findet auch in der That eine nähere Verwandtschaft beider statt. Denn für unendlich kleine Seiten fließen beide zusammen in die analogen der ebnen Trigonometrie $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Indem nämlich bei unendlich kleinen sphärischen Dreiecken die Winkelsummen $A+B+C=\pi$ wird, wird $\frac{1}{2}(B+C-A)=\frac{1}{2}(B+C+A)-A=\frac{1}{2}\pi-A$, also $\cos\frac{1}{2}(B+C-A)=\sin A$; und aus $\frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}$ erhält man $\frac{\frac{1}{2}a}{\sin A}$. In sofern nun bei ebnen Dreiecken durch den Quotient $\frac{\frac{1}{2}a}{\sin A}$ der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises ausgedrückt wird, ist die Gleichung $\frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$ ein Analogon zu der planimetrischen $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Zuſ. 1. Aus $\text{tang}r = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}$

$= \frac{\text{tang}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$ erhält man

$$\text{tang}^3 r = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}b\,\text{tang}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)};$$

Wird dieſe Gleichung dividirt durch

$$\text{tang}^2 r = \frac{\sin\frac{1}{2}T}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}$$

die man aus der oben No. 3. für tang r entwickelten Formel erhält, ſo ergiebt ſich

$$\text{tang}\,r = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}b\,\text{tang}\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}T} \quad (4.)$$

oder $\text{tang}\,r \sin\frac{1}{2}T = \text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}b\,\text{tang}\frac{1}{2}c$.

Iſt T das Maximum, welches die Seiten a, b zulaſſen, ſo iſt nach §. 42. $\sin\frac{1}{2}T = \text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}b$; daher erhält man dann aus (4)

$$\text{tang}\,r = \text{tang}\frac{1}{2}c, \text{ oder } c = 2r$$

In dem größten Dreiecke zweier Seiten iſt alſo die dritte Seite der Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes.

Aus $\text{tang}\,r \sin\frac{1}{2}T = \text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}b\,\text{tang}\frac{1}{2}c$, erhält man für ebne Dreiecke

$$4rT = abc;$$

d. h. das Prisma, welches den Flächenraum eines Dreieckes zur Baſis und den doppelten Durchmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes zur Höhe hat, iſt dem rechtwinkligen Parallelepipedum aus den Seiten des Dreieckes gleich.

Zuſ. 2. Liegen zwei ſphäriſche Dreiecke T, T′ auf gleicher Grundſeite c und in gleichen Kreiſen, ſo folgt aus

$$\sin\tfrac{1}{2}T\,\text{tang}\,r = \text{tang}\tfrac{1}{2}a\,\text{tang}\tfrac{1}{2}b\,\text{tang}\tfrac{1}{2}c;$$
$$\sin\tfrac{1}{2}T'\,\text{tang}\,r = \text{tang}\tfrac{1}{2}a'\,\text{tang}\tfrac{1}{2}b'\,\text{tang}\tfrac{1}{2}c';$$

die Proportion

$$\frac{\sin\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{2}T'} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}b}{\text{tang}\frac{1}{2}a'\,\text{tang}\frac{1}{2}b'}.$$

Sind M, M' die größten Dreiecke aus den Seiten a, b und a', b'; so ist: $\sin\frac{1}{2}M = \tang\frac{1}{2}a \tang\frac{1}{2}b$;

$\sin\frac{1}{2}M' = \tang\frac{1}{2}a' \tang\frac{1}{2}b'$;

daher ist $\frac{\sin\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{2}T'} = \frac{\sin\frac{1}{2}M}{\sin\frac{1}{2}M'}$

Es verhalten sich also die Sinus der halben Flächenräume zweier sphärischen Dreiecke, welche auf gleichen Grundseiten und in gleichen Nebenkreisen liegen, wie die Sinus der halben Maxima, welche die andern beiden Seiten jedes Dreieckes zulassen.

Zus. 3. Die Formel $\tang r = \frac{2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}{g}$

verwandelt sich, wenn die Seiten a, b, c unendlich klein werden, in die planimetrische Formel

$$r = \frac{2.\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}b.\frac{1}{2}c}{\sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(a+b-c)\frac{1}{2}(a+c-b)\frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

$$= \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}.$$

Das Sehnendreieck eines sphärischen liegt mit diesem in einem und demselben Kreise. Wie die Seiten desselben die Sehnen der Bogen sind, die das sphärische Dreieck bilden, so ist auch der gradlinige Durchmesser des umgeschriebenen Kreises die Sehne des sphärischen Durchmessers desselben. Bezeichnen wir die Sehnen der Seiten a, b, c mit a, b, c; so ist $\frac{1}{2}a = \sin\frac{1}{2}a$; $\frac{1}{2}b = \sin\frac{1}{2}b$; $\frac{1}{2}c = \sin\frac{1}{2}c$. Eben so ist, wenn $\mathfrak{R}$ den Halbmesser der Kreisebne bezeichnet, $\mathfrak{R} = \sin r$. Aus der oben erwähnten Formel für $\mathfrak{R}$, nämlich

$$\mathfrak{R} = \frac{2\frac{1}{2}a.\frac{1}{2}b.\frac{1}{2}c}{\sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(a+b-c)\frac{1}{2}(a+c-b)\frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

folgt daher für den Sinus des sphärischen Radius r die Formel

$$\sin r = \frac{2\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{(\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}c)(\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}b-\sin\frac{1}{2}c)(\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}c-\sin\frac{1}{2}b)(\sin\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}c-\sin\frac{1}{2}a)}}.$$

r, wenn der ſymmetriſche Nenner des zweiten Theiles mit g bezeichnet wird

$$\sin r = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{g}. \quad (5.)$$

Derſelbe Ausdruck findet ſich aus der Formel

$$\operatorname{tang} r = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{g}$$

wenn man ſetzt

$$\sin^2 r = \frac{\operatorname{tang}^2 r}{1 + \operatorname{tang}^2 r} = \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} c}{4 \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} c + g^2};$$

wo $4 \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b \sin^2 \frac{1}{2} c + g^2 = g^2$ wird.

Aus $\operatorname{tang} r = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{g}$;

und $\sin r = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{g}$

folgt $\frac{\sin r}{\operatorname{tang} r} = \cos r = \frac{g}{g}$. (6.)

Zuſ. 4. Für den Umſchreibungsradius r des Polardreieckes erhält man, indem in den für r entwickelten Formeln 1, 2, 3, 4, 5, 6, die Seiten und Winkel gegen die Supplemente der Winkel und Seiten vertauſcht werden, die Formeln:

1) $\tang r = \frac{\cotg\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(c+b-a)} = \frac{\cotg\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}(a+c-b)} = \frac{\cotg\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}$;

2) $\tang r = \frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{G}$;

3) $\tang r = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b-a)}}$;
$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{g}$,

4) $\tang r = \frac{\cotg\frac{1}{2}A\cotg\frac{1}{2}B\cotg\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$;

5) $\sin r = \frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\mathfrak{G}}$;

6) $\cos r = \frac{G}{\mathfrak{G}}$;

wo $\mathfrak{G} = \sqrt{(\cos\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}C)(\cos\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}B-\cos\frac{1}{2}C)(\cos\frac{1}{2}A+\cos\frac{1}{2}C-\cos\frac{1}{2}B)(\cos\frac{1}{2}B+\cos\frac{1}{2}C-\cos\frac{1}{2}A)}$;

Zwischen G und $\mathfrak{G}$ findet nach Zuf. 3. die Gleichung
$\mathfrak{G}^2 = 4\cos^2\frac{1}{2}A\cos^2\frac{1}{2}B\cos^2\frac{1}{2}C + G^2$ statt.

§. 60.

Aufgabe. Den sphärischen Radius des eingeschriebenen Kreises zu bestimmen.

Auflöſung. Da der eingeſchriebene Kreis der Polarkreis des um das Polardreieck beſchriebenen, alſo der ſphäriſche Radius des erſteren das Komplement von dem des letzteren iſt (g. S. §. 71, §. 44.); ſo iſt, wenn ϱ den ſphär. Radius des eingeſchriebenen Kreiſes bedeutet, $\varrho = \frac{1}{2}\pi - r$. Daher ergeben ſich aus vorſtehendem Zuſatze die Formeln:

1) $\operatorname{tang}\varrho = \sin\frac{1}{2}(c+b-a)\operatorname{tang}\frac{1}{2}A;$
$= \sin\frac{1}{2}(a+c-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}B;$
$= \sin\frac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{tang}\frac{1}{2}C;$

2) $\operatorname{tang}\varrho = \frac{G}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C};$

3) $\operatorname{tang}\varrho = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}}$
$= \frac{g}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)};$

4) $\operatorname{tang}\varrho = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C}$
$= \sin\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{2}A\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\operatorname{tang}\frac{1}{2}C;$

5) $\cos\varrho = \frac{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\mathfrak{G}};$

6) $\sin\varrho = \frac{G}{\mathfrak{G}}.$

Unabhängig von jenen Formeln laſſen ſich dieſe aus Konſtruktion herleiten. Das Dreieck ABC (Fig. 23.) werde von dem Kreiſe $\alpha\beta\gamma$, deſſen Mittelpunkt M iſt, in den Punkten α, β, γ berührt. Zieht man nach den Berührungspunkten die Radien $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, die auf den Tangenten BC, CA, AB ſenkrecht ſtehen (g. S. §. 65, Zuſ. 1.), und dann den Bogen MA, der den Winkel A der Tangenten BA, CA halbirt (g. S. §. 67, Zuſ. 4.); ſo iſt in dem rechtwinkligen Dreiecke $M\gamma A$

$$\operatorname{tang} M\gamma = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A \sin A\gamma.$$

Da nun $A\gamma = A\beta$; $B\gamma = B\alpha$; $C\alpha = C\beta$ iſt (g. S. §. 67, Zuſ. 3.), ſo iſt $A\gamma + A\beta = AB + AC - BC = c + b - a$; daher $A\gamma = \frac{1}{2}(c+b-a)$. Dies in obiger Gleichung ſubſtituirt giebt:

$$\text{tang } M\gamma = \text{tang } \tfrac{1}{2}A \cdot \sin \tfrac{1}{2}(c+b-a)$$

woraus die übrigen Formeln sich wie im vorigen §. herleiten lassen.

Zus. Aus $\text{tang } r = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{g}$

und $$\text{tang } \varrho = \frac{g}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}$$

folgt $$\text{tang } r \text{ tang } \varrho = \frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}$$

Diese Gleichung auf das Polardreieck angewendet, dessen Um- und Einschreibungsradien die Komplemente von ϱ und r sind, giebt:

$$\text{cotg } r \text{ cotg } \varrho = \frac{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)}$$

oder $$\text{tang } r \text{ tang } \varrho = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)}{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}T}{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}.$$

Bemerkenswerth ist die hieraus sich ergebende Relation

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{-\cos \frac{1}{2}(A+B+C)}{2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C};$$

Anmerk. Aus der Gleichung $\text{tang } r \text{ tang } \varrho = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}(a+b+c)}$

erhält man für ebne Dreiecke die Gleichung

$$2r.\varrho.(a+b+c) = abc$$

d. h. das rechtwinklige Parallelepipedum aus den Seiten eines Dreieckes ist von dem rechtwinkligen Parallelepipedum aus den Durchmessern der um- und eingeschriebenen Kreise und dem Perimeter des Dreieckes die Hälfte.

§. 61.

Aufgabe. Den sphärischen Radius der Gegenkreise, zwischen denen ein sphärisches Dreieck liegt, zu bestimmen.

Auflösung. Nimmt man a als Grundseite des Drei-

eckes $\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\gamma\\ a\,b\,c\\ ABC\end{matrix}\right\}$, so sind die Gegenkreise, zwischen denen dasselbe liegt, diejenigen, in denen das Nebendreieck $(\bar{\alpha}\beta\gamma)$ und dessen Gegendreieck $(\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma})$ liegen. Um also den sphärischen Radius r′ des um $(\bar{\alpha}\beta\gamma)$ beschriebenen Kreises zu finden, braucht man nur die für r gefundenen Formeln des §. 59. auf das Nebendreieck $\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}\,\beta\,\gamma\\ a\,\bar{b}\,\bar{c}\\ A\bar{B}\bar{C}\end{matrix}\right\}$ anzuwenden. Daher ist:

1) $\operatorname{tang} r' = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)} = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}T}$;

und $\operatorname{tang} r' = \dfrac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)} = \dfrac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}$;

2) $\operatorname{tang} r' = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{g}$;

3) $\operatorname{tang} r' = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{G}$;

4) $\operatorname{tang} r' = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{cotg}\frac{1}{2}b\operatorname{cotg}\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}$;

5) $\sin r' = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{g'}$;

6) $\cos r' = \dfrac{g}{g'}$

wo in den letzten beiden Formeln g′ dieselbe Funktion von $\sin\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}c$, wie g von $\sin\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}b$, $\sin\frac{1}{2}c$ ist.

Zus. 1. Wird b oder c als Grundseite genommen, so liegt das Dreieck zwischen den um $(\alpha\bar{\beta}\gamma)$ und $(\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma})$ oder $(\alpha\beta\bar{\gamma})$ und $(\alpha\bar{\beta}\gamma)$ beschriebenen Kreisen. Für die Radien r″, r‴ derselben ist in obigen Formeln a mit b oder c zu vertauschen.

Aus $\operatorname{tang} r' = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}T}$; $\operatorname{tang} r'' = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}T}$;

$\text{tang}\, r''' = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2} c}{\sin \frac{1}{2} T}$ folgt:

$$\frac{\text{tang}\, r'}{\text{tang}\, \frac{1}{2} a} = \frac{\text{tang}\, r''}{\text{tang}\, \frac{1}{2} b} = \frac{\text{tang}\, r'''}{\text{tang}\, \frac{1}{2} c}.$$

Zuſ. 2. Aus der merkwürdigen Formel $\text{tang}\, r' = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} T}$ iſt erſichtlich, daß durch zwei von den Größen T, a, r' die dritte beſtimmt wird. Daraus folgen die Sätze:

1) Dreiecke auf gleicher Grundſeite und zwiſchen gleichen Gegenkreiſen haben gleichen Flächenraum.

2) Dreiecke auf gleichen Grundſeiten und von gleichem Flächenraume liegen zwiſchen gleichen Gegenkreiſen.

3) Dreiecke von gleichem Flächenraume und zwiſchen gleichen Gegenkreiſen liegen auf gleichen Grundſeiten.

Die Formel $\sin \frac{1}{2} T = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2} a}{\text{tang}\, r'}$ iſt des Sinus wegen für T zweideutig, wie denn auch bei gegebener Grundſeite und gegebenen Gegenkreiſen zwei verſchiedene Dreiecke möglich ſind, die auf entgegengeſetzten Seiten der Grundſeite liegen, und von denen das eine $= \pi - U$, das andere $= \pi + U$ iſt, wo $U = (B + C - A)$. (ſ. S. §. 78, Zuſ. 2.)

Zuſ. 3. Die ſphäriſche Entfernung $\alpha\beta$ (Fig. 24.) der Gegenkreiſe, zwiſchen denen ein ſphäriſches Dreieck liegt, iſt das Supplement des (ſphäriſchen) Durchmeſſers dieſer Kreiſe, oder der ſphäriſche Halbmeſſer derſelben iſt das Komplement der halben Entfernung. Wie bei ebnen Dreiecken der Abſtand der Parallelen, zwiſchen denen daſſelbe liegt, die Höhe des Dreieckes ausmacht; ſo kann der Analogie gemäß die ſphäriſche Entfernung der Gegenkreiſe eines ſphäriſchen Dreieckes die Höhe deſſelben genannt werden. Wird ſie mit h und zwar in Bezug auf die Grundſeite a mit h' bezeichnet, ſo iſt $r' = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} h'$. Aus $\sin \frac{1}{2} T = \frac{\text{tang}\, \frac{1}{2} a}{\text{tang}\, r'}$ folgt dann der Ausdruck

$$\sin \tfrac{1}{2} T = \text{tang}\, \tfrac{1}{2} a \, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} h'$$

der eine merkwürdige Analogie der sphärischen und der ebnen Dreiecke, bei denen $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}h'$ ist, ausspricht.

Wird b oder c als Grundseite genommen und mit h'', h''' die zugehörige Höhe bezeichnet, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h'''.$$

Zus. 4. Aus der Formel $\sin\frac{1}{2}T = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h'$ ergiebt sich der Satz:

Sphärische Dreiecke haben gleichen Flächenraum, wenn die Produkte aus den Tangenten der halben Grundseiten und Höhen gleich sind; — oder: wenn die Tangenten der halben Grundseiten sich umgekehrt wie die der halben Höhen verhalten. Umgekehrt folgt aus der Gleichheit der Flächenräume die der genannten Produkte oder die umgekehrte Proportionalität der Tangenten der halben Grundseiten und Höhen.

Zus. 5. Da $\sin\frac{1}{2}T \leqq 1$ ist, so muß immer $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h' \leqq 1$, also $(a+h') \leqq \pi$ sein. Ist $\sin\frac{1}{2}T = 1$, also $T = \pi$, so ist $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}h' = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\pi - h')$; also $a = \pi - h' = 2r'$. Daraus folgt, daß in jedem sphärischen Dreiecke, welches den vierten Theil der Kugelfläche einnimmt, die Grundseite ein Durchmesser der Gegenkreise ist, zwischen denen das Dreieck liegt. Vergl. g. S. §. 78, Zus. 5.

Zus. 6. Sind a, a' die Grundseiten; h, h' die Höhen zweier Dreiecke von gleichem Flächenraume, so folgen aus $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a' \operatorname{tang}\frac{1}{2}h'$ oder $\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a'} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h'}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h}$ die Proportionen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-a')}{\sin\frac{1}{2}(a+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(h'-h)}{\sin\frac{1}{2}(h'+h)};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-h')}{\sin\frac{1}{2}(a+h')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-h)}{\sin\frac{1}{2}(a'+h)}; \quad (\text{§. 2, 70.})$$

§. 62.

Konstruirt man die Gegenkreise des Dreieckes ABC (Fig. 25. a.), von denen der eine durch A, der andere durch B, C geht, dessen Mittelpunkt M sei und zieht die Radien MB, MC, so wie auf die Mitte D der Grundseite BC das Perpendikel MD; so ist nach g. S. §. 78 die Summe der Winkel MBD + MCD das Supplement des Flächenraumes von ABC, also der Winkel MBD das Komplement des halben Flächenraumes. Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MDB ergeben sich demgemäß außer der oben Zus. 3. angeführten Formel noch andere bemerkenswerthe Ausdrücke für den Flächenraum des sphärischen Dreieckes, in welchen auch die Analogie desselben mit dem ebnen Dreiecke zum Theil noch vielseitiger hervortritt.

Bezeichnet man in dem genannten Dreiecke den Radius MB wieder mit r'; MD mit q; BD mit $\frac{1}{2}a$ und den Winkel BMC, der den relativen Werth des zugehörigen in d halbirten Nebenbogens BdC giebt, mit α, also den Winkel BMD, oder den relativen Werth von Bd mit $\frac{1}{2}\alpha$; so erhält man für den Winkel MBD die Gleichungen:

1) $\cos MBD = \frac{\tang \frac{1}{2}a}{\tang r'}$; 2) $\cos MBD = \cos q \sin \frac{1}{2}\alpha$;

3) $\sin MBD = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}a}$; 4) $\sin MBD = \frac{\sin q}{\sin r'}$;

5) $\cotg MBD = \tang \frac{1}{2}\alpha \cos r'$; 6) $\cotg MBD = \frac{\sin \frac{1}{2}a}{\tang q}$.

Setzt man hier $(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}T)$ für MBD und $(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h')$ für r'; so ergeben sich für den Flächenraum T die Formeln:

1) $\sin \frac{1}{2}T = \tang \frac{1}{2}a \tang \frac{1}{2}h'$;

2) $\sin \frac{1}{2}T = \sin \frac{1}{2}\alpha . \cos q$;

3) $\cos \frac{1}{2}T = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha}{\cos \frac{1}{2}a}$;

4) $\cos \frac{1}{2}T = \frac{\sin q}{\cos \frac{1}{2}h'}$;

5) $\tang \frac{1}{2}T = \tang \frac{1}{2}\alpha \sin \frac{1}{2}h$;

6) $\text{tang}\frac{1}{2}T = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,q}$;

Beschreibt man um M als Pol einen Hauptkreis, der das über D und d verlängerte Perpendikel MD in E schneidet, die Seiten AB, AC aber in F, G halbirt*) (§. 58, Zus. 4.); so ist das im Mittelpunkte der Grundseite BC errichtete und bis zum Durchschnitte mit dem die Mittelpunkte von AB, AC verbindenden Bogen fortgesetzte Perpendikel DE das Komplement von DM, oder q. Wird dasselbe mit p bezeichnet und zwar in Bezug auf die Grundseite a mit p′, verwandeln sich die Formeln 2, 4, 6, in denen $(\frac{1}{2}\pi - p')$ für q substituirt werden, in folgende:

7) $\sin\frac{1}{2}T = \sin\frac{1}{2}\alpha \sin p'$;

8) $\cos\frac{1}{2}T = \frac{\cos p'}{\cos\frac{1}{2}h'}$.

9) $\text{tang}\frac{1}{2}T = \sin\frac{1}{2}a\,\text{tang}\,p'$.

Die Formeln 7 und 9 sind analog der Formel $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}a.p'$ bei ebnen Dreiecken, wenn p′ das im Mittelpunkte der Grundseite a errichtete und bis zu der durch die Mittelpunkte der Seiten b, c gezogenen Linie FG (Fig. 25.b.) fortgesetzte

*) Trigonometrisch läßt sich dieser Satz so beweisen. Man ziehe den Quadrant MF, so ist in dem Dreiecke MBF

$$\cos MBF = \frac{\cos MF - \cos MB.\cos BF}{\sin MB.\sin BF}$$

$$= -\cot g\,MB.\cot g\,BF;\ \text{weil } MF = \tfrac{1}{2}\pi.$$

$$= -\cot g.r'\cot g\,BF$$

Nun ist $MBF = MBD + DBF = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}T + B$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(A + B + C - \pi) + B$$

$$= \pi - \tfrac{1}{2}(A + C - B);$$

Daher $\cos\frac{1}{2}(A + C - B) = \cot g\,r'\cot g\,BF$.

Setzt man für $\cot g\,r'$ den Werth $\frac{\sin\frac{1}{2}T}{\text{tang}\frac{1}{2}a} = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\text{tang}\frac{1}{2}a}$,

so erhält man $\cos\frac{1}{2}(A + C - B) = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A + B + C)}{\text{tang}\frac{1}{2}a\ \text{tang}\,BF}$;

daher $\text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\,BF = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A + C - B)}$

$$= \text{tang}\tfrac{1}{2}a\,\text{tang}\tfrac{1}{2}c;\ (\text{§. 31., V.}).$$

Folglich $BF = \frac{1}{2}c$. Ebenso folgt $CG = \frac{1}{2}b$.

Perpendikel DE bedeutet, das hier zugleich die halbe Höhe des Dreieckes mißt, was bei sphäriſchen Dreiecken nicht der Fall iſt. Wie in ebnen Dreiecken die gerade Linie FG mit der Grundſeite BC parallel iſt, ſo iſt dies in sphäriſchen wenigſtens mit dem Bogen FG und dem Nebenbogen BdC, deſſen relativer Werth in 7. enthalten iſt, der Fall.

Zuſ. Sind T′, T″ die Flächenräume zweier Dreiecke zwiſchen gleichen Gegenkreiſen oder von gleicher Höhe h, deren Grundſeiten a′, a″ ſind, ſo folgt aus:

$$\sin\tfrac{1}{2}T' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h;$$

und $$\sin\tfrac{1}{2}T'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a'' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h;$$

$$\sin\tfrac{1}{2}T' + \sin\tfrac{1}{2}T'' = (\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a' + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a'')\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h;$$

oder

$$2\sin\tfrac{1}{2}(T'+T'')\cos\tfrac{1}{2}(T'-T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h; \quad (\varphi)$$

Ferner: $\sin\frac{1}{2}T' - \sin\frac{1}{2}T'' = (\operatorname{tang}\frac{1}{2}a' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}a'')\operatorname{tang}\frac{1}{2}h;$

oder

$$2\sin\tfrac{1}{2}(T'-T'')\cos\tfrac{1}{2}(T'+T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-a'')}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h; \quad (\psi)$$

Daher wenn (φ) durch (ψ) dividirt wird:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T'+T'')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T'-T'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')}{\sin\frac{1}{2}(a'-a'')}.$$

Sind die Grundſeiten gleich, die Höhen h′, h″ ungleich, ſo erhält man:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T'+T'')}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(T'-T'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(h'+h'')}{\sin\frac{1}{2}(h'-h'')}.$$

Aus der Formel $\operatorname{tang}\frac{1}{2}T = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}h$ (5.) erhält man für die Dreiecke T′, T″, deren Höhen gleich ſind:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}T' + \operatorname{tang}\frac{1}{2}T''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}T' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}T''} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha' + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha''};$$

oder

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(T'+T'')}{\sin\frac{1}{2}(T'-T'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha'')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha'')}.$$

und wenn die Höhen h′, h″ ungleich, aber $\alpha' = \alpha''$, alſo die Nebenbogen, deren sphäriſche Sehnen die Grundſeiten ſind, ähnlich ſind:

$$\frac{\tan\frac{1}{2}T' + \tan\frac{1}{2}T''}{\tan\frac{1}{2}T' - \tan\frac{1}{2}T''} = \frac{\sin\frac{1}{2}h' + \sin\frac{1}{2}h'}{\sin\frac{1}{2}h' - \sin\frac{1}{2}h''}$$

oder $$\frac{\sin\frac{1}{2}(T' + T'')}{\sin\frac{1}{2}(T' - T'')} = \frac{\tan\frac{1}{2}(h' + h'')}{\tan\frac{1}{2}(h' - h'')}.$$

Aehnliche Proportionen lassen sich aus den übrigen Formeln dieses §. herleiten.

§. 63.

Aufgabe. Es ist ein sphärisches Dreieck gegeben; man soll einen Bogen konstruiren, der dem Flächenraume des Dreieckes gleich ist.

Auflösung. Das gegebene Dreieck sei ABC (Fig. 26.). Man halbire alle Seiten desselben in D, E, F; errichte in dem Mittelpunkte der einen, etwa in D, ein Perpendikel und beschreibe um B (oder C) mit dem Radius FE einen Kreis, der in G das Perpendikel schneide; so ist DG dem halben Flächenraume des Dreieckes gleich. Die Verdoppelung dieses Bogens giebt also den ganzen Flächenraum.

Beweis. In dem Dreiecke AFE, dessen Seiten AF, $AE = \frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b$ sind und dessen dritte Seite FE mit m bezeichnet sei, ist:

$$\cos m = \cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\cos A \quad (\S.\ 12.)$$

Nach §. 37., 25. ist nun:

$$\left.\begin{matrix}\sin\frac{1}{2}(A+B+C)\\ \text{oder}\quad \cos\frac{1}{2}T\end{matrix}\right\} = \frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos A}{\cos\frac{1}{2}a};$$

daher ist $$\cos\tfrac{1}{2}T = \frac{\cos m}{\cos\frac{1}{2}a}.$$

Macht man also $\frac{1}{2}a$ zur Kathete und m zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, so ist die andere Kathete $= \frac{1}{2}T$, woraus die Richtigkeit der Auflösung erhellt.

Zus. 1. Im vorigen §. wurde die Formel $\cos\frac{1}{2}T = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}a}$ gefunden. Aus dieser und der obigen $\cos\frac{1}{2}T = \frac{\cos m}{\cos\frac{1}{2}a}$ folgt, daß $m = \frac{1}{2}\alpha$ ist.

Der Bogen also, welcher die Mittelpunkte zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes ver-

bindet, ist gleich der Hälfte des Zentriwinkels, der auf der dritten (Grund-) Seite des Dreieckes als auf der zugehörigen Sehne in einem der Gegenkreise steht, zwischen denen das Dreieck liegt.

Oder: der genannte Bogen m ist der Hälfte des relativen Werthes des Nebenbogens gleich, der, zu einem der Gegenkreise des Dreieckes gehörig, die Grundseite desselben umspannt.

Zus. 2. Das Dreieck BDG ist sehr merkwürdig. Denn außer dem, daß die Kathete GD dem halben Flächenraume des Dreieckes ABC gleich ist, ist der Winkel an G dem Radius der Gegenkreise, zwischen denen das Dreieck in Rücksicht der Grundseite BC liegt; und der Winkel an B dem in §. 62. erwähnten Perpendikel (p'), welches in der Mitte D der Grundseite errichtet und bis an FE geführt wird, gleich; oder der Winkel GBD ist das Komplement der Entfernung MD der Grundseite BC von dem Mittelpunkte M des untern Gegenkreises. Denn es ist:

$$\text{tang BGD} = \frac{\text{tang BD}}{\sin \text{DG}} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}a}{\sin \frac{1}{2}T} = \text{tang } r'; \text{ (§. 61.)}$$

also Winkel BGD $= r'$.

Ferner ist $\text{tang GBD} = \frac{\text{tang GD}}{\sin \text{BD}} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}T}{\sin \frac{1}{2}a}$.

Nach §. 62, No. 9 ist $\text{tang } p' = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}T}{\sin \frac{1}{2}a}$;

daher ist Winkel GBD $= p' = \frac{1}{2}\pi - q$ (§. 62.)

$= \frac{1}{2}\pi - \text{DM}$.

Zus. 3. Das Dreieck MBG bietet den §. 45., Zus. 3. erwähnten Fall dar. Es ist nämlich:

$\text{GBD} = \frac{1}{2}\pi - \text{DM}$; $\text{DBM} = \frac{1}{2}\pi - \text{DG}$;

daher $\text{GBM} = \pi - \text{GM}$;

$\text{BG} = \text{BMD}$;

$\text{BM} = \text{BGM}$.

§. 64.

Aufgabe. Aus einer Spitze eines sphärischen Dreieckes nach der gegenüber liegenden Seite einen Bogen zu ziehen, durch welchen das Dreieck halbirt wird.

Auflösung. (Fig. 27.a.) Um von der Spitze B (oder C) des Dreieckes ABC den verlangten Bogen zu ziehen, konstruire man den Mittelpunkt M des durch B, C gehenden Gegenkreises; errichte im Endpunkte B des Radius MB ein Perpendikel BF und halbire den unterhalb der Grundseite BC liegenden Winkel FBC durch den Bogen Bm, der in m das durch die Mitte D der Grundseite geführte Perpendikel schneidet. Um den Gegenpunkt m' dieses Durchschnittes beschreibe man mit dem Radius Bm einen Kreis, der in E, G die Seiten AC, AB schneide; so leistet der von B nach E, so wie der von C nach G gezogene Bogen der Aufgabe Genüge.

Beweis. Der Winkel DBM ist das Komplement des halben Flächenraumes von ABC, (s. S. §. 78.), also, wenn DBM+DCM wie an dem angemerkten Orte mit U, oder DBM mit $\frac{1}{2}$U, der Flächenraum ABC mit T bezeichnet wird, $\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}U$. Eben so ist der Winkel mBD das Komplement des Flächenraumes des zwischen den um m, m' beschriebenen Gegenkreisen liegenden Dreieckes BCE; also, wenn derselbe mit $\frac{1}{2}$U', der Flächenraum BCE mit T' bezeichnet wird, $\frac{1}{2}T'=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}U'$ oder $T'=\pi-U'$. Nun ist $\frac{1}{2}U'=\frac{1}{2}FBD=\frac{1}{2}FBM+\frac{1}{2}MBD=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}U$; daher $U'=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}U$ und $\pi-U'=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}U=\frac{1}{2}T$; folglich ist $T'=\frac{1}{2}T$.

Da das Dreieck BCG mit BCF zwischen einerlei Gegenkreisen auf derselben Grundseite BC liegt, so ist auch $BCG=\frac{1}{2}ABC$.

Zus. 1. In welchem Verhältnisse die Abschnitte AG, AE zu den Seiten AB, AC stehen, ist §. 57. nachgewiesen worden.

Zuſ. 2. Nach der Formel $\text{tang}\,r' = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}T'}$ (§. 61.) erhält man für den Radius Bm

$$\text{tang}\,Bm = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}T'} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{4}T}.$$

Daraus ergiebt ſich die Gleichung zwiſchen Bm und r', (wenn nämlich BM durch r' bezeichnet wird),

$$\frac{\text{tang}\,Bm}{\text{tang}\,r'} = \frac{\sin\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{4}T} = 2\cos\tfrac{1}{4}T;$$

oder $\text{tang}\,Bm = 2\cos\frac{1}{4}T\,\text{tang}\,r'.$

Für den Bogen Dm, durch welchen die Lage von m bestimmt wird, erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke BDm die Formel:

$$\begin{aligned}\text{tang}\,Dm &= \text{tang}\,mBD \cdot \sin BD\\ &= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}U' \cdot \sin\tfrac{1}{2}a\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{2}T'} = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{4}T}.\end{aligned}$$

Setzt man für $\sin\frac{1}{4}T$, $\text{tang}\,\frac{1}{4}T$ die §. 41. angeführten Werthe, ſo erhält man durch die Seiten des Dreieckes ABC ausgedrückt:

$$\text{tang}\,Bm = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)\sin\frac{1}{4}(a+c-b)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}};$$

$$\text{tang}\,Dm = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sqrt{\text{tang}\,\frac{1}{4}(a+b+c)\,\text{tang}\,\frac{1}{4}(a+b-c)\,\text{tang}\,\frac{1}{4}(a+c-b)\,\text{tang}\,\frac{1}{4}(b+c-a)}};$$

Zuſ. 3. Aendert man beliebig die Lage des Punktes m auf dem Perpendikel mDm', ſo ändert ſich dabei die Lage von m' und E, ſo wie der Inhalt T' des Dreieckes BCE. Indeß ſind für jede Lage die Gleichungen:

$$\text{tang}\,Dm = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{2}T'};$$

$$\text{tang}\,Bm = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}T'};$$

gültig. Soll nun allgemein $T' = \frac{n}{m}T$ ſein, ſo erhält man

durch dieſe Gleichungen die nöthigen Beſtimmungen für Dm und Bm, von denen die Konſtruktion des dieſer Theilung des Dreieckes ABC entſprechenden Durchſchnittes E abhängt. Es wird nämlich:

$$\text{tang}\,Dm = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\left(\frac{n}{2m}T\right)};$$

$$\text{tang}\,Bm = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\sin\left(\frac{n}{2m}T\right)}.$$

§. 65.

Aufgabe. Ein gegebenes ſphäriſches Dreieck in ein ſphäriſches Parallelogramm zu verwandeln.

Auflöſung. Das gegebene Dreieck ſei ABC (Fig. 27. b.) Man halbire daſſelbe durch den Bogen AD und beſchreibe auf der andern Seite von AC das Dreieck ACE ſo, daß AE = DC; EC = AD genommen wird, ſo iſt das Parallelogramm ADCE dem Dreiecke ABC gleich.

Beweis. Das Dreieck ACE iſt gleich dem Dreiecke ADC, weil alle Seiten in beiden Dreiecken bezüglich gleich ſind; daher iſt ACE auch = ADB und ADCE = ABC. Ein ſphäriſches Parallelogramm iſt aber das Viereck ADCE, weil je zwei einander gegenüber liegenden Seiten gleich ſind (g. S. §. 96.).

Zuſ. Soll das Parallelogramm mit dem Dreiecke gleiche Grundſeite AC haben, ſo konſtruire man das Dreieck ADF, ſo daß AF = DC, FD = AC genommen wird.

§. 66.

Aufgabe. Den Flächenraum eines ſphäriſchen Parallelogrammes auszudrücken.

Auflöſung. 1) Es ſei ABCD (Fig. 28.) ein ſphäriſches Parallelogramm. Zieht man in demſelben eine Diagonale AB, ſo iſt das Dreieck ABC die Hälfte des Paral-

lelogrammes und hat mit demſelben gleiche Grundſeite BC, die mit a bezeichnet ſei, und gleiche Höhe h, da beide zwiſchen denſelben Gegenkreiſen liegen. Aus der Formel $\sin\frac{1}{2}T = \text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}h$ erhält man alſo für das Parallelogramm, deſſen Flächenraum mit P bezeichnet ſei, die Formel:

$$\sin\tfrac{1}{2}P = \text{tang}\tfrac{1}{2}a\,\text{tang}\tfrac{1}{2}h. \quad (1.)$$

2) Für den Flächenraum des Dreieckes ABC hat man nach §. 41. die Formel:

$$\text{cotg}\tfrac{1}{2}T = \frac{\text{cotg}\frac{1}{2}BC\,\text{cotg}\frac{1}{2}AC + \cos ACB}{\sin ACB},$$

oder, wenn BC, AC, ACB durch a, b, C ausgedrückt werden, $\text{cotg}\frac{1}{2}T = \frac{\text{cotg}\frac{1}{2}a\,\text{cotg}\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}$;

Daher iſt: $\text{cotg}\frac{1}{2}P = \frac{\text{cotg}\frac{1}{2}a\,\text{cotg}\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}$. (2.)

Eben ſo iſt: $\text{cotg}\frac{1}{2}P = \frac{\text{cotg}\frac{1}{2}a\,\text{cotg}\frac{1}{2}b + \cos B}{\sin B}$

wenn durch B der Winkel DBC bezeichnet wird.

3) Aus $\frac{\text{cotg}\frac{1}{2}a\,\text{cotg}\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C} = \frac{\text{cotg}\frac{1}{2}a\,\text{cotg}\frac{1}{2}b + \cos B}{\sin B}$

folgt

$(\text{cotg}\frac{1}{2}a\,\text{cotg}\frac{1}{2}b + \cos C)\sin B = (\text{cotg}\frac{1}{2}a\,\text{cotg}\frac{1}{2}b + \cos B)\sin C$;

hieraus

$\text{cotg}\frac{1}{2}a\,\text{cotg}\frac{1}{2}b\,(\sin B - \sin C) = \sin C\cos B - \cos C\sin B$;

$= \sin(C-B)$;

oder $-\text{cotg}\frac{1}{2}a\,\text{cotg}\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(C+B)\sin\frac{1}{2}(C-B)$

$= \cos\frac{1}{2}(C-B)\sin\frac{1}{2}(C-B)$

daher $-\cos\frac{1}{2}(C+B) = \text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(C-B)$. ($\varphi$)

Nun iſt $P = A+B+C+D-2\pi$, oder, da $A=B$, $C=D$ iſt, $P = 2(C+B)-2\pi$;

mithin $\frac{1}{2}P = \frac{1}{2}(C+B) - \frac{1}{2}\pi$

und $\sin\frac{1}{2}P = -\cos\frac{1}{2}(B+C)$;

Daher erhält man aus (φ) die Formel:

$$\sin\tfrac{1}{2}P = \text{tang}\tfrac{1}{2}a\,\text{tang}\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}(C-B). \quad (3.)$$

der eine merkwürdige Analogie der ſphäriſchen und der ebnen Dreiecke, bei denen $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}a.\frac{1}{2}h'$ iſt, ausſpricht.

Wird b oder c als Grundſeite genommen und mit h″, h‴ die zugehörige Höhe bezeichnet, ſo iſt:

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h'''.$$

Zuſ. 4. Aus der Formel $\sin\frac{1}{2}T = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h'$ ergiebt ſich der Satz:

Sphäriſche Dreiecke haben gleichen Flächenraum, wenn die Produkte aus den Tangenten der halben Grundſeiten und Höhen gleich ſind; — oder: wenn die Tangenten der halben Grundſeiten ſich umgekehrt wie die der halben Höhen verhalten. Umgekehrt folgt aus der Gleichheit der Flächenräume die der genannten Produkte oder die umgekehrte Proportionalität der Tangenten der halben Grundſeiten und Höhen.

Zuſ. 5. Da $\sin\frac{1}{2}T \leqq 1$ iſt, ſo muß immer $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h' \leqq 1$, alſo $(a + h') \leqq \pi$ ſein. Iſt $\sin\frac{1}{2}T = 1$, alſo $T = \pi$, ſo iſt $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}h' = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\pi - h')$; alſo $a = \pi - h' = 2r'$. Daraus folgt, daß in jedem ſphäriſchen Dreiecke, welches den vierten Theil der Kugelfläche einnimmt, die Grundſeite ein Durchmeſſer der Gegenkreiſe iſt, zwiſchen denen das Dreieck liegt. Vergl. g. S. §. 78, Zuſ. 5.

Zuſ. 6. Sind a, a′ die Grundſeiten; h, h′ die Höhen zweier Dreiecke von gleichem Flächenraume, ſo folgen aus $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a' \operatorname{tang}\frac{1}{2}h'$ oder $\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a'} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h'}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h}$ die Proportionen:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-a')}{\sin\frac{1}{2}(a+a')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(h'-h)}{\sin\frac{1}{2}(h'+h)};$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-h')}{\sin\frac{1}{2}(a+h')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-h)}{\sin\frac{1}{2}(a'+h)}; \quad (\text{§. 2, 70.})$$

$$\cos\tfrac{1}{2}P = \frac{\cos p}{\cos\frac{1}{2}h}; \quad (6.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}P = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}h. \quad (7.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}P = \sin\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang} p. \quad (8.)$$

Zuſ. 1. Aus den Formeln $\sin\frac{1}{2}P = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h$ und $\sin\frac{1}{2}P = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}(C-B)$ folgt:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}(C-B) \text{ oder}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(C-B) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}.$$

Zieht man in dem Gegenkreiſe BCD'A' (Fig. 29.) des Parallelogrammes ABCD den Radius MB und verlängert DB über B hinaus, ſo iſt der Winkel $MBD' = \frac{1}{2}(C-B)$. Denn da D' der Gegenpunkt von D iſt, ſo iſt $BD' = \pi - BD = \pi - b$. Fällt man von dem Mittelpunkte M auf die Sehne BD' das Perpendikel ML, ſo iſt $BL = \frac{1}{2}BD' = \frac{1}{2}(\pi - b)$. In dem rechtwinkligen Dreiecke MLB, deſſen Hypotenuſe $MB = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h$ iſt (§. 61, Zuſ. 3.), iſt nun:

$$\cos MBL = \frac{\operatorname{tang} BL}{\operatorname{tang} MB} = \frac{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}b)}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}$$

Daher iſt $\cos MBL = \cos\frac{1}{2}(C-B)$ und $MBL = \frac{1}{2}(C-B)$.

Daſſelbe ergiebt ſich aus folgender Betrachtung:
der Winkel MBC ſei mit u', MCB mit u'', MBD' mit v' und der durch Verlängerung von AC gebildete Winkel MCA', mit v'' bezeichnet. Nach No. 3. und 4. dieſes §. iſt nun:

$$C + B = \pi + \tfrac{1}{2}P;$$

und $\quad u' + u'' = \pi - \tfrac{1}{2}P;$

daher $\quad C + B + u' + u'' = 2\pi;$

Ferner iſt $\quad B + u' + v' = \pi; \quad (\alpha)$

und $\quad C + u'' - v'' = \pi; \quad (\beta)$

weil B, C die Nebenwinkel von $(u' + v')$, $(u'' - v'')$ ſind.

Daher iſt $B + C + u' + u'' + v' - v'' = 2\pi = B + C + u' + u''$;

folglich $\ldots\ldots v' - v'' = 0$ oder $v' = v''$.

Subtrahirt man nun die Gleichung (α) von (β), ſo iſt:

$$C - B + u'' - u' - v' - v'' = 0$$

6) $\text{tang}\frac{1}{2}T = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,q}$;

Beſchreibt man um M als Pol einen Hauptkreis, der das über D und d verlängerte Perpendikel MD in E ſchneidet, die Seiten AB, AC aber in F, G halbirt*) (§. 58, Zuſ. 4.); ſo iſt das im Mittelpunkte der Grundſeite BC errichtete und bis zum Durchſchnitte mit dem die Mittelpunkte von AB, AC verbindenden Bogen fortgeſetzte Perpendikel DE das Komplement von DM, oder q. Wird daſſelbe mit p bezeichnet und zwar in Bezug auf die Grundſeite a mit p', verwandeln ſich die Formeln 2, 4, 6, in denen $(\frac{1}{2}\pi - p')$ für q ſubſtituirt werden, in folgende:

7) $\sin\frac{1}{2}T = \sin\frac{1}{2}\alpha \sin p'$;

8) $\cos\frac{1}{2}T = \frac{\cos p'}{\cos\frac{1}{2}h'}$.

9) $\text{tang}\frac{1}{2}T = \sin\frac{1}{2}a\,\text{tang}\,p'$.

Die Formeln 7 und 9 ſind analog der Formel $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2}a.p'$ bei ebnen Dreiecken, wenn p' das im Mittelpunkte der Grundſeite a errichtete und bis zu der durch die Mittelpunkte der Seiten b, c gezogenen Linie FG (Fig. 25. b.) fortgeſetzte

*) Trigonometriſch läßt ſich dieſer Satz ſo beweiſen. Man ziehe den Quadrant MF, ſo iſt in dem Dreiecke MBF

$$\cos MBF = \frac{\cos MF - \cos MB.\cos BF}{\sin MB.\sin BF}$$
$$= -\cot g\,MB.\cot g\,BF;\ \text{weil } MF = \tfrac{1}{2}\pi.$$
$$= -\cot g.r'\cot g\,BF$$

Nun iſt $MBF = MBD + DBF = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}T + B$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(A + B + C - \pi) + B$$
$$= \pi - \tfrac{1}{2}(A + C - B);$$

Daher $\cos\frac{1}{2}(A + C - B) = \cot g\,r'\cot g\,BF$.

Setzt man für $\cot g\,r'$ den Werth $\frac{\sin\frac{1}{2}T}{\text{tang}\frac{1}{2}a} = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\text{tang}\frac{1}{2}a}$,

ſo erhält man $\cos\frac{1}{2}(A + C - B) = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A + B + C)}{\text{tang}\frac{1}{2}a\ \text{tang}\,BF}$;

daher $\text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\,BF = \frac{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{\cos\frac{1}{2}(A + C - B)}$
$$= \text{tang}\frac{1}{2}a\,\text{tang}\frac{1}{2}c;\ (\text{§. 31., V.}).$$

Folglich $BF = \frac{1}{2}c$. Ebenſo folgt $CG = \frac{1}{2}b$.

Perpendikel DE bedeutet, das hier zugleich die halbe Höhe des Dreieckes mißt, was bei sphärischen Dreiecken nicht der Fall ist. Wie in ebnen Dreiecken die gerade Linie FG mit der Grundseite BC parallel ist, so ist dies in sphärischen wenigstens mit dem Bogen FG und dem Nebenbogen BdC, dessen relativer Werth in 7. enthalten ist, der Fall.

Zus. Sind T′, T″ die Flächenräume zweier Dreiecke zwischen gleichen Gegenkreisen oder von gleicher Höhe h, deren Grundseiten a′, a″ sind, so folgt aus:

$$\sin\tfrac{1}{4}T' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}a' \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}h;$$

und

$$\sin\tfrac{1}{4}T'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}a'' \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}h;$$

$$\sin\tfrac{1}{4}T' + \sin\tfrac{1}{4}T'' = (\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}a' + \operatorname{tang}\tfrac{1}{4}a'')\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}h;$$

oder

$$2\sin\tfrac{1}{4}(T'+T'')\cos\tfrac{1}{4}(T'-T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}h; \quad (\varphi)$$

Ferner: $\sin\frac{1}{2}T' - \sin\frac{1}{2}T'' = (\operatorname{tang}\frac{1}{2}a' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}a'')\operatorname{tang}\frac{1}{2}h;$

oder

$$2\sin\tfrac{1}{4}(T'-T'')\cos\tfrac{1}{4}(T'+T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-a'')}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}h; \quad (\psi)$$

Daher wenn (φ) durch (ψ) dividirt wird:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(T'+T'')}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(T'-T'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')}{\sin\frac{1}{2}(a'-a'')}.$$

Sind die Grundseiten gleich, die Höhen h′, h″ ungleich, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(T'+T'')}{\operatorname{tang}\frac{1}{4}(T'-T'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(h'+h'')}{\sin\frac{1}{2}(h'-h'')}.$$

Aus der Formel $\operatorname{tang}\frac{1}{2}T = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}h$ (5.) erhält man für die Dreiecke T′, T″, deren Höhen gleich sind:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}T' + \operatorname{tang}\frac{1}{2}T''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}T' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}T''} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha' + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha''}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha' - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha''};$$

oder

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(T'+T'')}{\sin\frac{1}{2}(T'-T'')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\alpha'')}{\sin\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha'')}.$$

und wenn die Höhen h′, h″ ungleich, aber $\alpha' = \alpha''$, also die Nebenbogen, deren sphärische Sehnen die Grundseiten sind, ähnlich sind:

$$\frac{\tang\frac{1}{2}T' + \tang\frac{1}{2}T''}{\tang\frac{1}{2}T' - \tang\frac{1}{2}T''} = \frac{\sin\frac{1}{2}h' + \sin\frac{1}{2}h'}{\sin\frac{1}{2}h' - \sin\frac{1}{2}h''}$$

oder $$\frac{\sin\frac{1}{2}(T' + T'')}{\sin\frac{1}{2}(T' - T'')} = \frac{\tang\frac{1}{4}(h' + h'')}{\tang\frac{1}{4}(h' - h'')}.$$

Aehnliche Proportionen laſſen ſich aus den übrigen Formeln dieſes §. herleiten.

§. 63.

Aufgabe. Es iſt ein ſphäriſches Dreieck gegeben; man ſoll einen Bogen konſtruiren, der dem Flächenraume des Dreieckes gleich iſt.

Auflöſung. Das gegebene Dreieck ſei ABC (Fig. 26.). Man halbire alle Seiten deſſelben in D, E, F; errichte in dem Mittelpunkte der einen, etwa in D, ein Perpendikel und beſchreibe um B (oder C) mit dem Radius FE einen Kreis, der in G das Perpendikel ſchneide; ſo iſt DG dem halben Flächenraume des Dreieckes gleich. Die Verdoppelung dieſes Bogens giebt alſo den ganzen Flächenraum.

Beweis. In dem Dreiecke AFE, deſſen Seiten AF, $AE = \frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b$ ſind und deſſen dritte Seite FE mit m bezeichnet ſei, iſt:

$$\cos m = \cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\cos A \quad (\text{§. 12.})$$

Nach §. 37., 25. iſt nun:

$$\left.\begin{matrix}\sin\frac{1}{2}(A+B+C)\\ \text{oder}\quad \cos\frac{1}{2}T\end{matrix}\right\} = \frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos A}{\cos\frac{1}{2}a};$$

daher iſt $$\cos\tfrac{1}{2}T = \frac{\cos m}{\cos\frac{1}{2}a}.$$

Macht man alſo $\frac{1}{2}a$ zur Kathete und m zur Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreieckes, ſo iſt die andere Kathete $= \frac{1}{2}T$, woraus die Richtigkeit der Auflöſung erhellt.

Zuſ. 1. Im vorigen §. wurde die Formel $\cos\frac{1}{2}T = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}a}$ gefunden. Aus dieſer und der obigen $\cos\frac{1}{2}T = \frac{\cos m}{\cos\frac{1}{2}a}$ folgt, daß $m = \frac{1}{2}\alpha$ iſt.

Der Bogen alſo, welcher die Mittelpunkte zweier Seiten eines ſphäriſchen Dreieckes ver-

kel an C, D, G, H unter ſich gleich ſind, ſo ſind die Nebenwinkel derſelben in dem Vierecke CDGH gleich. Daher iſt CDGH gleichſeitig und gleichwinklig, alſo ein ſphäriſches Quadrat.

Zuſ. Iſt der Winkel eines ſphäriſchen Quadrates gegeben, ſo hat man in dem Supplemente deſſelben die Seite des Polarquadrates. Man kann alſo jenes Quadrat konſtruiren, wenn zuvor das Polarquadrat verzeichnet worden iſt.

§. 69.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Rechteck in ein ſphäriſches Quadrat zu verwandeln.

Auflöſung. Um das ſphäriſche Rechteck ABCD (Fig. 32.) in ein ſphäriſches Quadrat zu verwandeln, verlängere man AB über B, ſo daß die Verlängerung BE=BC wird; die Summe AE halbire man in M und beſchreibe um M mit dem Radius AM einen Kreis; errichte in B ein Perpendikel auf dem Durchmeſſer AE, welches die Peripherie des Kreiſes in F trifft; — ſo iſt BF die Seite des ſphäriſchen Quadrates, das mit ABCD gleichen Flächenraum hat. Die Konſtruktion deſſelben iſt nach vorigem §. auszuführen.

Beweis. Bezeichnet man den Flächeninhalt des Rechteckes ABCD mit P, den des Quadrates der Seite BF mit Q; ſo iſt $\sin\frac{1}{4}P = \text{tang}\frac{1}{2}AB\,\text{tang}\frac{1}{2}BC$; und $\sin\frac{1}{4}Q = \text{tang}^2\frac{1}{2}BF$ (§. 66, Zuſ. 2.).

Nach §. 54, Zuſ. 4. iſt nun:

$\text{tang}^2\frac{1}{2}BF = \text{tang}\frac{1}{2}AB\,\text{tang}\frac{1}{2}BF = \text{tang}\frac{1}{2}AB\,\text{tang}\frac{1}{2}BC$;

folglich $\sin\frac{1}{4}Q = \sin\frac{1}{4}P$; woraus $Q = P$ folgt.

Zuſ. 1. Da im Allgemeinen $\sin\frac{1}{4}P < 1$ iſt, ſo iſt $\text{tang}\frac{1}{2}AB.\text{tang}\frac{1}{2}BC < 1$; folglich $AB + BC$ oder $AE < \pi$. Daher iſt AM im Allgemeinen $< \frac{1}{2}\pi$, wie dies bei Nebenkreiſen vorausgeſetzt wird. Ausgenommen iſt der eine Fall, wenn $\sin\frac{1}{4}P = 1$ iſt. Dann iſt $\text{tang}\frac{1}{2}AB\,\text{tang}\frac{1}{2}BC = 1$, folglich $AE = \pi$; $AM = \frac{1}{2}\pi$ und der Kreis AFE ein Hauptkreis. Indem dann das Perpendikel FB ein Quadrat wird,

§. 64.

Aufgabe. Aus einer Spitze eines sphärischen Dreieckes nach der gegenüber liegenden Seite einen Bogen zu ziehen, durch welchen das Dreieck halbirt wird.

Auflösung. (Fig. 27.a.) Um von der Spitze B (oder C) des Dreieckes ABC den verlangten Bogen zu ziehen, konstruire man den Mittelpunkt M des durch B, C gehenden Gegenkreises; errichte im Endpunkte B des Radius MB ein Perpendikel BF und halbire den unterhalb der Grundseite BC liegenden Winkel FBC durch den Bogen Bm, der in m das durch die Mitte D der Grundseite geführte Perpendikel schneidet. Um den Gegenpunkt m′ dieses Durchschnittes beschreibe man mit dem Radius Bm einen Kreis, der in E, G die Seiten AC, AB schneide; so leistet der von B nach E, so wie der von C nach G gezogene Bogen der Aufgabe Genüge.

Beweis. Der Winkel DBM ist das Komplement des halben Flächenraumes von ABC, (g. S. §. 78.), also, wenn DBM+DCM wie an dem angemerkten Orte mit U, oder DBM mit $\frac{1}{2}$U, der Flächenraum ABC mit T bezeichnet wird, $\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}U$. Eben so ist der Winkel mBD das Komplement des Flächenraumes des zwischen den um m, m′ beschriebenen Gegenkreisen liegenden Dreieckes BCE; also, wenn derselbe mit $\frac{1}{2}U'$, der Flächenraum BCE mit T′ bezeichnet wird, $\frac{1}{2}T'=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}U'$ oder $T'=\pi-U'$. Nun ist $\frac{1}{2}U'=\frac{1}{2}FBD=\frac{1}{2}FBM+\frac{1}{2}MBD=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{4}U$; daher $U'=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}U$ und $\pi-U'=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}U=\frac{1}{2}T$; folglich ist $T'=\frac{1}{2}T$.

Da das Dreieck BCG mit BCF zwischen einerlei Gegenkreisen auf derselben Grundseite BC liegt, so ist auch $BCG=\frac{1}{2}ABC$.

Zus. 1. In welchem Verhältnisse die Abschnitte AG, AE zu den Seiten AB, AC stehen, ist §. 57. nachgewiesen worden.

Zuſ. 2. Nach der Formel $\text{tang}\,r' = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{4}T'}$ (§. 61.) erhält man für den Radius Bm

$$\text{tang}\,Bm = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{4}T'} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{4}T}.$$

Daraus ergiebt ſich die Gleichung zwiſchen Bm und r', (wenn nämlich BM durch r' bezeichnet wird),

$$\frac{\text{tang}\,Bm}{\text{tang}\,r'} = \frac{\sin\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{4}T} = 2\cos\tfrac{1}{4}T;$$

oder $\text{tang}\,Bm = 2\cos\frac{1}{4}T\,\text{tang}\,r'.$

Für den Bogen Dm, durch welchen die Lage von m bestimmt wird, erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke BDm die Formel:

$$\begin{aligned}\text{tang}\,Dm &= \text{tang}\,mBD\,.\sin BD\\ &= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}U'.\sin\tfrac{1}{2}a\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{2}T'} = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{4}T}.\end{aligned}$$

Setzt man für $\sin\frac{1}{4}T$, $\text{tang}\,\frac{1}{4}T$ die §. 41. angeführten Werthe, ſo erhält man durch die Seiten des Dreieckes ABC ausgedrückt:

$$\text{tang}\,Bm = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\sin\frac{1}{4}(a+b-c)\sin\frac{1}{4}(a+c-b)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}};$$

$$\text{tang}\,Dm = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sqrt{\text{tang}\,\frac{1}{4}(a+b+c)\,\text{tang}\,\frac{1}{4}(a+b-c)\,\text{tang}\,\frac{1}{4}(a+c-b)\,\text{tang}\,\frac{1}{4}(b+c-a)}};$$

Zuſ. 3. Aendert man beliebig die Lage des Punktes m auf dem Perpendikel mDm', ſo ändert ſich dabei die Lage von m' und E, ſo wie der Inhalt T' des Dreieckes BCE. Indeß ſind für jede Lage die Gleichungen:

$$\text{tang}\,Dm = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{2}T'};$$

$$\text{tang}\,Bm = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}T'};$$

gültig. Soll nun allgemein $T' = \frac{n}{m}T$ ſein, ſo erhält man

rch dieſe Gleichungen die nöthigen Beſtimmungen für Dm
d Bm, von denen die Konſtruktion des dieſer Theilung
des Dreieckes ABC entſprechenden Durchſchnittes E abhängt.
Es wird nämlich:

$$\text{tang}\,Dm = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\text{tang}\left(\frac{n}{2m}T\right)};$$

$$\text{tang}\,Bm = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}a}{\sin\left(\frac{n}{2m}T\right)}.$$

§. 65.

Aufgabe. Ein gegebenes ſphäriſches Dreieck in ein ſphäriſches Parallelogramm zu verwandeln.

Auflöſung. Das gegebene Dreieck ſei ABC (Fig. 27. b.) Man halbire daſſelbe durch den Bogen AD und beſchreibe auf der andern Seite von AC das Dreieck ACE ſo, daß AE = DC; EC = AD genommen wird, ſo iſt das Parallelogramm ADCE dem Dreiecke ABC gleich.

Beweis. Das Dreieck ACE iſt gleich dem Dreiecke ADC, weil alle Seiten in beiden Dreiecken bezüglich gleich ſind; daher iſt ACE auch = ADB und ADCE = ABC. Ein ſphäriſches Parallelogramm iſt aber das Viereck ADCE, weil je zwei einander gegenüber liegenden Seiten gleich ſind (g. S. §. 96.).

Zuſ. Soll das Parallelogramm mit dem Dreiecke gleiche Grundſeite AC haben, ſo konſtruire man das Dreieck ADF, ſo daß AF = DC, FD = AC genommen wird.

§. 66.

Aufgabe. Den Flächenraum eines ſphäriſchen Parallelogrammes auszudrücken.

Auflöſung. 1) Es ſei ABCD (Fig. 28.) ein ſphäriſches Parallelogramm. Zieht man in demſelben eine Diagonale AB, ſo iſt das Dreieck ABC die Hälfte des Paral-

$\sin\frac{1}{2}a = \sin r \sin\frac{1}{2}\alpha$; $\sin\frac{1}{2}b = \sin r \sin\frac{1}{2}\beta$;
$\sin\frac{1}{2}c = \sin r \sin\frac{1}{2}\gamma$; $\sin\frac{1}{2}d = \sin r \sin\frac{1}{2}\delta$;

ist, so ist auch

$$\sin\tfrac{1}{2}p = \sin r \sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma); \quad (1.)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}q = \sin r \sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta); \quad (2.)$$

daher $\sin\frac{1}{2}p \sin\frac{1}{2}q = \sin^2 r \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$;

$= \sin^2 r(\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma))$; (§. 3, 1.)

Nun ist $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$, also $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \pi - \frac{1}{2}\delta$ und $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\frac{1}{2}\delta$; folglich:

$\sin\frac{1}{2}p \sin\frac{1}{2}q = \sin^2 r(\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\delta)$;

$= \sin r \sin\frac{1}{2}\alpha . \sin r \sin\frac{1}{2}\gamma + \sin r \sin\frac{1}{2}\beta . \sin r \sin\frac{1}{2}\delta$;

mithin, wenn für $\sin r \sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin r \sin\frac{1}{2}\gamma$, u. s. w. $\sin\frac{1}{2}a$, $\sin\frac{1}{2}c$ u. s. w. gesetzt wird:

$$\sin\tfrac{1}{2}p \sin\tfrac{1}{2}q = \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}d. \quad (3.)$$

Aus (1) und (2) folgt ferner:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}q}{\sin\frac{1}{2}p} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}; \quad (\text{§. 3, 5.})$$
$$= \frac{\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma + \sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\delta}{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma\sin\frac{1}{2}\delta};$$

Substituirt man hier für $\sin\frac{1}{2}\alpha$, $\sin\frac{1}{2}\beta$ u. s. w. die Werthe $\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin r}$, $\frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin r}$ u. s. w. so erhält man:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}q}{\sin\frac{1}{2}p} = \frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}d}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d}; \quad (4.)$$

Wird (3.) durch (4.) dividirt und multiplizirt, so ergiebt sich

$$\sin^2\tfrac{1}{2}p = \frac{(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d)(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}d)}{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}a};$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}q = \frac{(\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}a)(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}d)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d};$$

Zus. 1. Bezeichnet man der Kürze wegen den Faktor:

$(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}d)$ mit z;
$(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d)$ mit z';
$(\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}a)$ mit z'';

Anmerk. Bei ebnen Parallelogrammen ist ebenfalls $P = ab \cos \frac{1}{2}(C-B)$. Da indeß hier $C+B=\pi$ ist, so wird $\cos \frac{1}{2}(C- \quad) = \sin B = \sin C$.

4) Von den Gegenkreisen, zwischen denen das Parallelogramm li zt, habe der durch B, C gehende seinen Mittelpunkt in M. Wie der Winkel MBC das Komplement des halben Flächenraumes ABC, oder die Summe MBC+MCB das Supplement des ganzen Flächenraumes ABC ist, so ist dieselbe Winkelsumme das Supplement des halben Parallelogrammes, oder der Winkel MBC das Komplement des vierten Theiles von ABCD. Der um M beschriebene Hauptkreis HFG halbirt nach §. 62. s wohl die Seiten AB, AC des Dreieckes ABC, als AB, LB des Dreieckes BDA und DC, DB des Dreieckes BCD; daher halbirt er die einander gegenüber stehenden Seiten AC, BD des Parallelogrammes und geht durch den Durchschnittspunkt I der Diagonale, der zugleich der Mittelpunkt von GH ist, weil nach §. 63, Zus. 1. sowohl IH als IG der Hälfte des Zentriwinkels BMC gleich ist. Daraus ergiebt sich auch, daß GH=BMC ist. Bezeichnen wir also BMC wieder mit α, wodurch zugleich der relative Werth des Nebenbogens BC ausgedrückt wird, so ist $\alpha = GH$, also der Bogen GH ähnlich dem Nebenbogen BC. Das von M auf die Mitte von BC gefällte Perpendikel ME treffe verlängert den Bogen GH in F. Die Verlängerung EF desselben ist für das Parallelogramm derselbe Bogen, wie das §. 62. erwähnte Perpendikel DE des Dreieckes ABC Fig. 25. a. und werde hier ebenfalls mit p bezeichnet. Indem also die Größen a, α, h, p hier dieselbe Bedeutung haben, wie §. 62., lassen sich die dort für den Flächenraum des Dreieckes entwickelten Formeln sogleich auf das Parallelogramm übertragen. Außer der schon in (1.) bemerkten erhält man also noch:

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \sin \tfrac{1}{2} \alpha \sin p; \quad (4.)$$

$$\cos \tfrac{1}{2} P = \frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} a}; \quad (5.)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}P = \frac{\cos p}{\cos\frac{1}{2}h}; \quad (6.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}P = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}h. \quad (7.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}P = \sin\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang} p. \quad (8.)$$

Zuſ. 1. Aus den Formeln $\sin\frac{1}{2}P = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h$ und $\sin\frac{1}{2}P = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}(C-B)$ folgt:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{2}(C-B) \text{ oder}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(C-B) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}.$$

Zieht man in dem Gegenkreiſe BCD'A' (Fig. 29.) des Parallelogrammes ABCD den Radius MB und verlängert DB über B hinaus, ſo iſt der Winkel $MBD' = \frac{1}{2}(C-B)$. Denn da D' der Gegenpunkt von D iſt, ſo iſt $BD' = \pi - BD = \pi - b$. Fällt man von dem Mittelpunkte M auf die Sehne BD' das Perpendikel ML, ſo iſt $BL = \frac{1}{2}BD' = \frac{1}{2}(\pi - b)$. In dem rechtwinkligen Dreiecke MLB, deſſen Hypotenuſe $MB = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h$ iſt (§. 61, Zuſ. 3.), iſt nun:

$$\cos MBL = \frac{\operatorname{tang} BL}{\operatorname{tang} MB} = \frac{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}b)}{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b}$$

Daher iſt $\cos MBL = \cos\frac{1}{2}(C-B)$ und $MBL = \frac{1}{2}(C-B)$.

Daſſelbe ergiebt ſich aus folgender Betrachtung: der Winkel MBC ſei mit u', MCB mit u'', MBD' mit v' und der durch Verlängerung von AC gebildete Winkel MCA', mit v'' bezeichnet. Nach No. 3. und 4. dieſes §. iſt nun:

$$C + B = \pi + \tfrac{1}{2}P;$$

und $$u' + u'' = \pi - \tfrac{1}{2}P;$$

daher $$C + B + u' + u'' = 2\pi;$$

Ferner iſt $B + u' + v' = \pi$; (α)

und $C + u'' - v'' = \pi$; (β)

weil B, C die Nebenwinkel von $(u' + v')$, $(u'' - v'')$ ſind.

Daher iſt $B + C + u' + u'' + v' - v'' = 2\pi = B + C + u' + u''$;

folglich ..... $v' - v'' = 0$ oder $v' = v''$.

Subtrahirt man nun die Gleichung (α) von (β), ſo iſt:

$$C - B + u'' - u' - v' - v'' = 0$$

ch, ou $v'=v''$ und auch $u''=u'$ iſt,

$$C-B=2v' \text{ oder } \tfrac{1}{2}(C-B)=v'.$$

Hieraus läßt ſich wieder die Formel No. 3. herleiten. Denn zieht man ME ⊥ BC, ſo iſt:

$$\cos u' = \frac{\operatorname{tang} BE}{\operatorname{tang} BM} \text{ oder } \sin\tfrac{1}{4}P = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang} r}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MLB folgt aber

$$\operatorname{tang} MB = \frac{\operatorname{tang} BL}{\cos v'} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tang} r = \frac{\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}b)}{\cos\frac{1}{2}(C-B)} = \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(C-B)}.$$

Dies ſubſtituirt giebt $\sin\frac{1}{4}P = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a\operatorname{tang}\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(C-B)$.

Zuſ. 2. Gehen die Seiten DB, AC des Parallelogrammes verlängert durch die Mittelpunkte M, M' der Gegenkreiſe, die durch B, C und A, D geführt werden; ſo ſind die Seiten AC, BD der Höhe des Parallelogrammes gleich, alſo $b = h$. Dann iſt zugleich das Parallelogramm ein gleichwinkliges und das größte, welches die Seiten a, b zulaſſen; es entſpricht alſo ganz dem ebnen Rechtecke. Die Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{4}P = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h;$$

$$\sin\tfrac{1}{4}P = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}(C-B);$$

geben für den Flächenraum dieſes ſphäriſchen Rechteckes aus den Seiten a, b den Ausdruck:

$$\sin\tfrac{1}{4}P = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b,$$

der eben ſo analog der für das ebne Rechteck gültigen Formel $P = ab$ iſt.

Sind die Seiten a, b des ſphäriſchen Rechteckes gleich, ſo erhält man ein ſphäriſches Quadrat und für den Flächenraum deſſelben die Formel:

$$\sin\tfrac{1}{4}P = \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}a.$$

Zuſ. 3. Da die Winkel A, B, C, D des ſphäriſchen Rechteckes gleich ſind, ſo iſt $P = 4A - 2\pi$; oder $\frac{1}{4}P = A - \frac{1}{2}\pi$; folglich $\sin\frac{1}{4}P = -\cos A$. Aus $\sin\frac{1}{4}P =$

§. 72.

Aufgabe. Die Winkel des eingeschriebenen sphärischen Viereckes durch die Seiten desselben auszudrücken.

Auflösung. Man ziehe in dem Vierecke ABCD (Fig. 34.) eine Diagonale BD, die wieder mit q bezeichnet werde, so wie durch a, b, c, d die Seiten DA, AB u. s. w. und durch A, B, C, D die Winkel nach ihren Scheiteln. In dem Dreiecke ABD ist nach §. 29.

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(q+a-b)\sin\frac{1}{2}(q+b-a)}{\sin a\sin b};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}q-\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin a\sin b}; \quad (\S.\ 2,\ 68.)$$

$$= \frac{\frac{z\,z''}{z'}-\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin a\sin b}; \quad (\S.\ 71,\ \text{Zuf. 1.})$$

$$= \frac{z\,z''-z'\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{z'\sin a\sin b}; \quad (\alpha)$$

Nun ist:

$z\,z'' = (\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c+\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}d)(\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c+\sin\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}a)$
$= \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b(\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}d)+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d(\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b);$
und $z'\sin^2\frac{1}{2}(a-b) = \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}(a-b)$
$+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d\sin^2\frac{1}{2}(a-b);$

daher:

$z\,z''-z'\sin^2\frac{1}{2}(a-b) = \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b(\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}d-\sin^2\frac{1}{2}(a-b))$
$+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d(\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}(a-b));$

Die in der letzten Parenthese enthaltenen Glieder lassen sich zusammenziehen. Denn es ist:

$\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}(a-b)$
$= \sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}(a-b)-1;$
$= \cos^2\frac{1}{2}(a-b)-(1-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b);$
$= \cos^2\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b); \quad (\S.\ 2,\ 69.)$
$= \cos\frac{1}{2}(a-b)(\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a+b));$
$= \cos\frac{1}{2}(a-b).2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b.$

Diesen Ausdruck substituirt erhält man:

$$\cos DAM = \frac{\text{tang } AD}{\text{tang } AM} = \frac{\text{tang } AE}{\text{tang } AN}$$

folglich, da $AM = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h$; $AN = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h'$ ist,

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}a \,\text{tang } \tfrac{1}{2}h = \text{tang } \tfrac{1}{2}a' \,\text{tang } \tfrac{1}{2}h';$$

woraus $\sin \frac{1}{4}P = \sin \frac{1}{4}P'$, also $P = P'$ folgt.

Kürzer erhält man den Beweis daraus, daß Winkel $DAM = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}P$; $EAN = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}P'$ ist.

Zuſ. 1. Eben ſo wird ein ſphäriſches Dreieck konſtruirt, deſſen Grundſeite nebſt einem anliegenden Winkel gegeben iſt, und das mit einem gegebenen Dreiecke gleichen Flächenraum hat.

Zuſ. 2. Wird die Bedingung, daß das zu konſtruirende Parallelogramm an der Grundſeite einen gegebenen Winkel habe, mit der andern, daß daſſelbe ein ſphäriſches Rechteck ſei, vertauſcht; ſo ändert ſich die angegebene Konſtruktion dahin ab, daß für AE die Verlängerung AH des Radius NA bis zu dem um N' beſchriebenen Kreiſe genommen und das dadurch beſtimmte Parallelogramm ACHI vollendet wird.

§. 68.

Aufgabe. Ein ſphäriſches Quadrat zu konſtruiren, deſſen Seite gegeben iſt.

Auflöſung. Es ſei CD (Fig. 31.) die Seite des zu konſtruirenden Quadrates. Um C und D beſchreibe man mit dem Radius $= \frac{1}{2}(\pi - CD)$ zwei Bogen, die ſich in M ſchneiden; ziehe die Bogen MC, MD die ſich verlängert in M', dem Gegenpunkte von M ſchneiden; beſchreibe um M' mit dem Radius $=$ MC einen Nebenkreis, der die Spindel MCDM' in G, H ſchneidet und ziehe GH—; ſo iſt CDGH ein ſphäriſches Quadrat.

Beweis. Wegen Gleichheit der Dreiecke MCD, M'GH iſt $GH = CD$. Da $MC, MD = \frac{1}{2}(\pi - CD)$, und M'G, $M'H = MC, MD$ iſt, ſo iſt $GC = \pi - (MC + M'G) = CD$ und eben ſo $HD = CD$; mithin das Viereck CDGH gleichſeitig. Da ferner in den Dreiecken MCD, M'GH die Win-

$$= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \left|1 - \sin^2\tfrac{1}{2}c - \sin^2\tfrac{1}{2}d - \cos^2\tfrac{1}{2}(a+b) + 2\sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}d \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right|;$$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d) \cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d) \sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d) \sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d); \quad (\beta)$$

Daher ist: $\cos^2\frac{1}{2}A =$

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d)\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a+b-c-d)}{z'\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b};$$

Aus diesen Formeln für $\sin\frac{1}{2}A$ und $\cos\frac{1}{2}A$ erhält man:

$\tang^2\frac{1}{2}A =$

$$\frac{\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a-b+c-d)\cos\frac{1}{4}(a-b-c+d)}{\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d)\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a+b-c-d)};$$

Nach der §. 71, Zus. 2. angenommenen Bezeichnung lassen sich diese Ausdrücke kürzer so darstellen:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}{z'\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}; \quad (1.)$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\overset{3}{S}\overset{4}{S}K\overset{12}{K}}{z'\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}; \quad (2.)$$

$$\tang^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}{\overset{3}{S}\overset{4}{S}K\overset{12}{K}}; \quad (3.)$$

Aus (1.) und (2.) erhält man durch Multiplikation:

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}K\overset{12}{K}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}}{z'\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}; \quad (4.)$$

durch Subtraktion:

$$\cos A = \frac{\overset{3}{S}\overset{4}{S}K\overset{12}{K} - \overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}{z'\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}; \quad (5.)$$

Durch Vertauschung jeder Seite mit der folgenden erhält man aus diesen Formeln:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{12}{K}\overset{13}{K}}{z''\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}; \quad (6.)\ (\overset{24}{K}\text{ gegen }\overset{13}{K}\text{ vertauscht.})$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{1}{S}\overset{4}{S}K\overset{14}{K}}{z''\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}; \quad (7.)$$

iſt der Umfang des Quadrates ſo wie der des Rechteckes einem Hauptkreiſe gleich, während jedes dieſer Vierecke zugleich die halbe Kugelfläche einnimmt. Hieraus läßt ſich ſchließen, daß in dieſem Falle das Rechteck, wie das Quadrat, einen Hauptkreis bildet und alſo aufhört ein Viereck zu ſein.

Aus §. 61., Zuſ. 5. geht dies evident hervor. Denn zieht man in dem Rechtecke, wie in dem Quadrate eine Diagonale, ſo ſind in den dadurch entſtandenen Dreiecken die Grundſeiten reſpektive Durchmeſſer der Gegenkreiſe, zwiſchen denen die Dreiecke liegen. Die an dieſe Grundſeiten ſich anſchließenden Seiten des Rechteckes und des Quadrates ſind dann aber nichts anderes, als die Verlängerungen der Grundſeiten; mithin wird aus jedem Vierecke ein Hauptkreis. Vergl. §. 62, Zuſ. 2. und §. 68.

Zuſ. 2. Um ein beliebiges ſphäriſches Polygon in ein ſphäriſches Quadrat zu verwandeln, verwandle man das Polygon in ein Dreieck (g. S. §. 84.); das Dreieck in ein Parallelogramm (§. 65.), dies in ein Rechteck und das Rechteck in ein Quadrat.

§. 70.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines ſphäriſchen Trapezes auszudrücken.

Auflöſung. Man zerlege das Trapez ABCD (Fig. 33.) durch eine Diagonale AD in zwei Dreiecke, deren Grundſeiten AB, CD — zugleich die Grundſeiten des Trapezes, d. h. diejenigen Seiten, welche Sehnen zweier Gegenkreiſe ſind — mit a′, a″, deren Flächenräume mit T′, T″ bezeichnet ſeien. Da beide Dreiecke zwiſchen denſelben Gegenkreiſen liegen, alſo gleiche Höhe h haben; ſo erhält man 1) aus der Formel: $\sin\frac{1}{2}T = \operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}h$ (§. 62.)

$$\sin\tfrac{1}{2}T' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h;$$

$$\sin\tfrac{1}{2}T'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a'' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h;$$

daher $\sin\frac{1}{2}T' + \sin\frac{1}{2}T'' = (\operatorname{tang}\frac{1}{2}a' + \operatorname{tang}\frac{1}{2}a'')\operatorname{tang}\frac{1}{2}h;$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(a' + a'')\tang\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}.$$

Aus der Formel $\cos\frac{1}{2}T = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}a}$ (§. 62.) erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}T' + \cos\tfrac{1}{2}T'' = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha'}{\cos\frac{1}{2}a'} + \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha''}{\cos\frac{1}{2}a''}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha'\cos\frac{1}{2}a'' + \cos\frac{1}{2}\alpha''\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''};$$

wo α', α'' die relativen Werthe der zu den Sehnen a', a' gehörigen Nebenbogen AB, CD sind.

Hieraus folgt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}T' + \sin\frac{1}{2}T''}{\cos\frac{1}{2}T' + \cos\frac{1}{2}T''} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a' + a'')\tang\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}\alpha'' + \cos\frac{1}{2}a''\cos\frac{1}{2}\alpha'};$$

oder $$\tang\tfrac{1}{2}(T' + T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a' + a'')\tang\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}\alpha'' + \cos\frac{1}{2}a''\cos\frac{1}{2}\alpha'};$$

für unendlich kleine Trapeze erhält man hieraus die planimetrische Formel: $\frac{1}{2}(T' + T'') = \frac{\frac{1}{2}(a'' + a'')\frac{1}{2}h}{2}$

oder $$(T' + T'') = \frac{(a' + a'')h}{2};$$

2) Aus der Formel $\tang\frac{1}{2}T = \tang\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}h$ (§. 62, No. 5.) erhält man:

$$\tang\tfrac{1}{2}T' + \tang\tfrac{1}{2}T'' = (\tang\tfrac{1}{2}\alpha' + \tang\tfrac{1}{2}\alpha'')\sin\tfrac{1}{2}h;$$

oder $$\frac{\sin\frac{1}{2}(T' + T'')}{\cos\frac{1}{2}T'\cos\frac{1}{2}T''} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha'')\sin\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}\alpha'\cos\frac{1}{2}\alpha''};$$

Nach der oben angezogenen Formel ist nun:

$$\cos\tfrac{1}{2}T'\cos\tfrac{1}{2}T'' = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha'}{\cos\frac{1}{2}a'} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha''}{\cos\frac{1}{2}a''};$$

daher $$\sin\tfrac{1}{2}(T' + T') = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha'')\sin\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}.$$

Beschreibt man um die Pole M, M' der Gegenkreise, zwischen denen das Trapez liegt, den Hauptkreis FEG, der in den genannten Punkten die Seiten AC, AD, BD halbirt (§. 58, Zus. 4.; §. 62.); so ist $FE = \frac{1}{2}\alpha''$; $EG = \frac{1}{2}\alpha'$ (§. 63, Zus. 1.); folglich $\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha'') = FG$. Bezeichnen wir diesen

AC, BD des Trapezes halbirenden Bogen FG mit m, so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}(T'+T'') = \frac{\sin m \sin\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}.$$

5. Aus der Gleichung

$$T' + \sin\tfrac{1}{2}T'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a')\tan\frac{1}{2}h}{\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''}$$

erhält man für das Trapez die Formel:

$$\sin\tfrac{1}{4}(T'+T'') = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'+a'')\tan\frac{1}{2}h}{2\cos\frac{1}{4}(T'-T'')\cos\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a''};$$

Aus welcher die Formeln für das Parallelogramm und das Dreieck sich herleiten lassen. Setzt man nämlich $a''=a'$; da dann auch $T''=T'$ wird, so erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{4}P = \frac{\sin a\tan\frac{1}{2}h}{2\cos^2\frac{1}{2}a} = \tan\tfrac{1}{2}a\tan\tfrac{1}{2}h.$$

Setzt man $a''=0$, wodurch auch $T''=0$ wird, so erhält man $\sin\frac{1}{4}T = \frac{\sin\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}h}{2\cos\frac{1}{4}T\cos\frac{1}{2}a}$; woraus

$\sin\frac{1}{2}T = \tan\frac{1}{2}a\tan\frac{1}{2}h$ folgt.

Vom eingeschriebenen Vierecke.

§. 71.

Aufgabe. Die Diagonalen des in einem Nebenkreise beschriebenen sphärischen Viereckes durch die Seiten desselben auszudrücken.

Auflösung. In dem Nebenkreise ABCD (Fig. 34.), dessen Mittelpunkt M ist, sei das sphärische Viereck ABCD beschrieben. Die Seiten DA, AB, BC, CD desselben seien der Reihe nach durch a, b, c, d; die zu denselben gehörigen Zentriwinkel DMA, AMB, BMC, CMD durch α, β, γ, δ bezeichnet, wodurch zugleich die relativen Werthe der Nebenbogen DA, AB, BC, CD ausgedrückt werden. Die Diagonalbogen AC, BD seien durch p, q angedeutet, der sphärische Radius des Kreises durch r. Wie nun nach §. 54, Zus. 1.

$$= \sin\tfrac{1}{2}(a+c)\cos\tfrac{1}{2}b.$$

Dieſen Ausdruck oben ſubſtituirt erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \sin\tfrac{1}{2}(a+c)\sqrt{\frac{S^{1}\,S^{3}\,K^{12}\,K^{16}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (22.)$$

Durch Verwechſelung der Seiten folgt hieraus:

$$\cos\tfrac{1}{2}(B-C) = \sin\tfrac{1}{2}(b+d)\sqrt{\frac{S^{2}\,S^{4}\,K^{12}\,K^{14}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d}}; \quad (23.)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(C-D) = \sin\tfrac{1}{2}(c+a)\sqrt{\frac{S^{1}\,S^{3}\,K^{12}\,K^{16}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (24.)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(D-A) = \sin\tfrac{1}{2}(d+b)\sqrt{\frac{S^{2}\,S^{4}\,K^{12}\,K^{14}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (25.)$$

Die Diviſion der Formeln 18 — 21 durch die vorſtehenden 22—25 ergiebt:

$$\tang\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(c-a)}{\sin\tfrac{1}{2}(c+a)}\sqrt{\frac{S^{3}\,S^{4}\,K\,K^{13}}{S^{1}\,S^{2}\,K^{12}\,K^{16}}}; \quad (26.)$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(d-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(d+b)}\sqrt{\frac{S^{1}\,S^{3}\,K\,K^{13}}{S^{2}\,S^{4}\,K^{12}\,K^{14}}}; \quad (27.)$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(C-D) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-c)}{\sin\tfrac{1}{2}(a+c)}\sqrt{\frac{S^{2}\,S^{4}\,K\,K^{13}}{S^{1}\,S^{3}\,K^{12}\,K^{14}}}; \quad (28.)$$

$$= -\tang\tfrac{1}{2}(A-B).$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(D-A) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(b-d)}{\sin\tfrac{1}{2}(b+d)}\sqrt{\frac{S^{1}\,S^{3}\,K\,K^{13}}{S^{2}\,S^{4}\,K^{12}\,K^{14}}}; \quad (29.)$$

$$= -\tang\tfrac{1}{2}(B-C).$$

Aus (26.) und (27.) folgt:

$$\tang\tfrac{1}{2}(A-B)\tang\tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(c-a)\sin\tfrac{1}{2}(d-b)}{\sin\tfrac{1}{2}(c+a)\sin\tfrac{1}{2}(d+b)}\cdot\frac{K\,K^{13}}{K^{12}\,K^{14}};$$

$$\frac{\tang\tfrac{1}{2}(A-B)}{\tang\tfrac{1}{2}(B-C)} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(c-a)\sin\tfrac{1}{2}(c+a)}{\sin\tfrac{1}{2}(d-b)\sin\tfrac{1}{2}(d+b)}\cdot\frac{S^{2}\,S^{4}}{S^{1}\,S^{3}}.$$

ſt: $\sin^2\frac{1}{2}p = \frac{z'}{z''}.z$; und $\sin^2\frac{1}{2}q = \frac{z''}{z'}.z$.

$$\sin\tfrac{1}{2}p\sin\tfrac{1}{2}q = z;\quad \frac{\sin\frac{1}{2}p}{\sin\frac{1}{2}q} = \frac{z'}{z''}.$$

Wird Seite des Viereckes mit der nächſtfolgenden, a mit b, b t c u. ſ. w. vertauſcht; ſo verwandelt ſich z′ in z″, p , z bleibt unverändert. Daſſelbe findet ſtatt, wenn jede S mit der vorhergehenden, a mit d, b mit a u. ſ. w. vertauſcht wird.

2. Die Größen z, z′, z″ laſſen ſich noch umfor-
ſt nämlich:

$$\sin^2 c + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}d;$$

$$= \frac{-c)-\cos\frac{1}{2}(a+c)}{2} + \frac{co}{} \quad \frac{b-d)-\cos\frac{1}{2}(b+d)}{2};\ (\S.2, 42.)$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)-\cos\frac{1}{2}(b+d)}{2} + \frac{\cos\frac{1}{2}(b-d)-\cos\frac{1}{2}(a+c)}{2};$$

$z = \sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d) +$
$\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d);$ (§. 2, 46.)

Bezeichnet man die Faktoren

$\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)$, $\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)$, $\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d)$,

$\sin\frac{1}{4}(a+b+c-d)$ der Reihe nach mit $\overset{1}{S}$, $\overset{2}{S}$, $\overset{3}{S}$, $\overset{4}{S}$,

ſo iſt $z = \overset{1}{S}\overset{3}{S} + \overset{2}{S}\overset{4}{S}$;

Vertauſcht man in z die Seite c mit b und demgemäß die Marke (³) mit (²), ſo erhält man z′; nämlich:

$$z' = \overset{1}{S}\overset{2}{S} + \overset{3}{S}\overset{4}{S}.$$

Wird in z′ jede Seite mit der folgenden verwechſelt, ſo ergiebt ſich:

$$z' = \overset{2}{S}\overset{3}{S} + \overset{4}{S}\overset{1}{S}.$$

Aus obiger Gleichung:

$$z = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)-\cos\frac{1}{2}(a+c)}{2} + \frac{\cos\frac{1}{2}(b-d)-\cos\frac{1}{2}(b+d)}{2}$$

erhält man durch veränderte Zuſammenſtellung:

$$z = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)+\cos\frac{1}{2}(b-d)}{2} - \frac{\cos\frac{1}{2}(a+c)+\cos\frac{1}{2}(b+d)}{2};$$

Nach §. 71, Zuſ. 2. iſt $z' = \overset{1}{S}\overset{2}{S} + \overset{3}{S}\overset{4}{S}$; alſo

$$\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S} + \overset{3}{S}\overset{4}{S}}{z'} = 1\text{; folglich}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \sqrt{\frac{K\overset{12}{K}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{; (30.)}$$

Dieſelben Formeln 1 — 4 und 10 — 13 ergeben:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{K\overset{12}{K}}{z'}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{;}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{\overset{13}{K}\overset{14}{K}}{z'}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{;}$$

daraus folgt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{K\overset{12}{K} - \overset{13}{K}\overset{14}{K}}{z'}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{;}$$

Nach §. 71, Zuſ. 2. iſt: $\frac{K\overset{12}{K} - \overset{13}{K}\overset{14}{K}}{z'} = -1$;

folglich iſt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\text{; (31.)}$$

Aus (30.) und (31.) erhält man:

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{K\overset{12}{K}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}}}\text{; (32.)}$$

$$\text{und } \sin(A+C) = -2\frac{\sqrt{\overset{1}{S}\overset{2}{S}\overset{3}{S}\overset{4}{S}K\overset{12}{K}\overset{13}{K}\overset{14}{K}}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}\text{; (33.)}$$

Da in den Formeln (30.), (31.), (32.) (33.) die Seiten des Viereckes ſymmetriſch enthalten ſind, ſo hat die Vertauſchung derſelben keinen Einfluß auf die Formeln. Man erhält daher dieſelben Ausdrücke für

$\sin\frac{1}{2}(B+D)$, $\cos\frac{1}{2}(B+D)$, $\tang\frac{1}{2}(B+D)$, $\sin(B+D)$;

woraus ſich wieder der Satz ergiebt, daß $A+C = B+D$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\operatorname{tang} e'''}{\operatorname{tang} r}; \quad \cos\tfrac{1}{2}\delta = \frac{\operatorname{tang} e''''}{\operatorname{tang} r}.$$

Aus $\dfrac{\sin\frac{1}{2}q}{\sin\frac{1}{2}p} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma - \cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta - \cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}; \text{ (§. 2, 5.)}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma + \cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\delta}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta + \cos\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\delta}$$

erhält man daher:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}q}{\sin\frac{1}{2}p} = \frac{\operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e''''}{\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e'' + \operatorname{tang} e'''\operatorname{tang} e''''} \quad (\varphi)$$

Und aus $\sin\frac{1}{2}p\sin\frac{1}{2}q = \sin^2 r \cdot \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$

$= \sin^2 r(\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma - \cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma))$ (§. 3, 2.)

$= \sin^2 r(\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\gamma + \cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\delta)$

ergiebt ſich:

$$\sin\tfrac{1}{2}p\sin\tfrac{1}{2}q = \cos^2 r(\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e'''').(\psi)$$

Aus (φ) und (ψ) folgt:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}p = \frac{\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e'' + \operatorname{tang} e'''\operatorname{tang} e''''}{\operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''''\operatorname{tang} e'} \cdot (\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e'''').\cos^2 r;$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}q = \frac{\operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''''\operatorname{tang} e'}{\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e'' + \operatorname{tang} e'''\operatorname{tang} e''''} \cdot (\operatorname{tang} e'\operatorname{tang} e''' + \operatorname{tang} e''\operatorname{tang} e'''').\cos^2 r.$$

Bezeichnet man die Perpendikel vom Mittelpunkte M des Kreiſes auf die Diagonalen p, q durch $\overset{p}{e}$, $\overset{q}{e}$, ſo laſſen ſich mittelſt der Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\overset{p}{e} = \cos\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\operatorname{tang} r;$$

$$\operatorname{tang}\overset{q}{e} = \cos\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{tang} r;$$

ähnliche Relationen für $\overset{p}{e}$, $\overset{q}{e}$ herleiten.

Zuſ. 4. Daß zwiſchen den Abſchnitten p′, p″, q′, q″ der Diagonalen p, q die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}p'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}p'' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}q'\operatorname{tang} q''$$

ſtatt findet, iſt §. 54, Zuſ. 2. bemerkt worden.

§. 72.

Aufgabe. Die Winkel des eingeschriebenen sphärischen Viereckes durch die Seiten desselben auszudrücken.

Auflösung. Man ziehe in dem Vierecke ABCD (Fig. 34.) eine Diagonale BD, die wieder mit q bezeichnet werde, so wie durch a, b, c, d die Seiten DA, AB u. s. w. und durch A, B, C, D die Winkel nach ihren Scheiteln. In dem Dreiecke ABD ist nach §. 29.

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(q+a-b)\sin\frac{1}{2}(q+b-a)}{\sin a\sin b};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}q-\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin a\sin b}; \quad (\S.\ 2,\ 68.)$$

$$= \frac{\frac{zz''}{z'}-\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{\sin a\sin b}; \quad (\S.\ 71,\ \text{Zuf. 1.})$$

$$= \frac{zz''-z'\sin^2\frac{1}{2}(a-b)}{z'\sin a\sin b}; \quad (\alpha)$$

Nun ist:

$zz'' = (\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c+\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}d)(\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c+\sin\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}a)$
$=\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b(\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}d)+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d(\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b);$

und $z'\sin^2\frac{1}{2}(a-b) = \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}(a-b)$
$+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d\sin^2\frac{1}{2}(a-b);$

daher:

$zz''-z'\sin^2\frac{1}{2}(a-b) = \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b(\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}d-\sin^2\frac{1}{2}(a-b))$
$+\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}d(\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}(a-b));$

Die in der letzten Parenthese enthaltenen Glieder lassen sich zusammenziehen. Denn es ist:

$\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b-\sin^2\frac{1}{2}(a-b)$
$= \sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}(a-b)-1;$
$= \cos^2\frac{1}{2}(a-b)-(1-\sin^2\frac{1}{2}a-\sin^2\frac{1}{2}b);$
$= \cos^2\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(a+b);$ (§. 2, 69.)
$= \cos\frac{1}{2}(a-b)(\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a+b));$
$= \cos\frac{1}{2}(a-b).2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b.$

Diesen Ausdruck substituirt erhält man:

$$z z'' - z' \sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) = \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \{\sin^2\tfrac{1}{2}c + \sin^2\tfrac{1}{2}d - \sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) + 2\sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}d \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\};$$

$$= -\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \{1 - \sin^2\tfrac{1}{2}c - \sin^2\tfrac{1}{2}d - \cos^2\tfrac{1}{2}(a-b) - 2\sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}d \cos\tfrac{1}{2}(a-b)\};$$

Der in { } befindliche Theil läßt ſich nach §. 4, No. 3. in Faktoren zerlegen. Schreibt man dort $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}d$, $\frac{1}{2}(a-b)$ reſp. für α, β, γ; ſo ergiebt ſich:

$$z z'' - z' \sin^2\tfrac{1}{2}(a-b) =$$
$$4 \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \cdot \sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d) \sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d) \cos\tfrac{1}{4}(a-b-c+d) \cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d);$$

Wird dieſer Ausdruck für $z z'' - z' \sin^2\frac{1}{2}(a-b)$ in (α) eingeſetzt und Nenner und Zähler mit $4 \sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b$ dividirt, ſo erhält man:

$$\sin^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d) \sin\frac{1}{4}(a-b+c+d) \cos\frac{1}{4}(a-b-c+d) \cos\frac{1}{4}(a-b+c-d)}{z' \cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b};$$

Die Symmetrie der zwei letzten Faktoren des Zählers in Bezug auf A wird deutlicher, wenn man ſie ſo ſchreibt:

$$\cos\tfrac{1}{4}((a-b)+(c-d)) \cos\tfrac{1}{4}((a-b)-(c-d))$$

Um $\cos\frac{1}{2}A$ zu finden erhält man aus dem Dreiecke ABD

$$\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+q) \sin\frac{1}{2}(a+b-q)}{\sin a \sin b}; \quad (\text{§. 29.})$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}(a+b) - \sin^2\frac{1}{2}q}{\sin a \sin b};$$

$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}(a+b) - \frac{z z''}{z'}}{\sin a \sin b};$$

$$= \frac{z' \sin^2\frac{1}{2}(a+b) - z z''}{z' \sin a \sin b}.$$

Nach der oben ausgeführten Entwickelung erhält man hier:

$$z' \sin^2\tfrac{1}{2}(a+b) - z z'' =$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b (\sin^2\tfrac{1}{2}(a+b) - \sin^2\tfrac{1}{2}c \sin^2\tfrac{1}{2}d) + \sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}d (\sin^2\tfrac{1}{2}(a+b) - \sin^2\tfrac{1}{2}a - \sin^2\tfrac{1}{2}b);$$
$$= \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b (\sin^2\tfrac{1}{2}(a+b) - \sin^2\tfrac{1}{2}c - \sin^2\tfrac{1}{2}d) + 2\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}d \cos\tfrac{1}{2}(a+b);$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a' = \frac{-\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}}{Z'\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'};$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a' = \frac{\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{Z'\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'};$$

$$\tang^2\tfrac{1}{2}a' = \frac{-\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}}{\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}$$

$$\sin a' = \frac{2\sqrt{-\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}}{Z'\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'};$$

$$\cos a' = \frac{\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C} + \overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{Z'\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'}.$$

Für die Seiten b', c', d' hat man in den vorstehenden Formeln nur die gehörige Vertauschung der Buchstaben A', B', C', D' und der Marken ^{1}, ^{2}, ^{3}, ^{4}, (′), (″), vorzunehmen, wobei zu bemerken ist, daß nach §. 71, Zus. 2. für $\overset{23}{C}$, $\overset{24}{C}$, $\overset{34}{C}$ geschrieben werden kann: $\overset{4}{C}$, $\overset{3}{C}$, $\overset{2}{C}$.

Aus Zus. 3. desselben §. erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}(b'-a') = \sin\tfrac{1}{2}(A'-C')\sqrt{\frac{-\overset{2}{C}\overset{4}{C}C\overset{13}{C}}{Z'Z''\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}C'}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(b'-a') = \sin\tfrac{1}{2}(A'+C')\sqrt{\frac{\overset{1}{C}\overset{3}{C}\overset{12}{C}\overset{14}{C}}{Z'Z''\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}C'}};$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(b'-a') = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(A'-C')}{\sin\tfrac{1}{2}(A'+C')}\sqrt{\frac{-\overset{2}{C}\overset{4}{C}C\overset{13}{C}}{\overset{1}{C}\overset{3}{C}\overset{12}{C}\overset{14}{C}}};$$

Aus Zus. 5. folgt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'+c') = \sqrt{\frac{-C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'\sin\tfrac{1}{2}C'\sin\tfrac{1}{2}D'}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a'+c') = \sqrt{\frac{\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}}{\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'\sin\tfrac{1}{2}C'\sin\tfrac{1}{2}D'}};$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}}{\overset{1}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{14}{K}}; \quad (8.)$$

$$\sin B = \frac{2\sqrt{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}}{z'' \cos \tfrac{1}{2} b \cos \tfrac{1}{2} c}; \quad (9.)$$

Wird in [illegible]en Formeln dieselbe Vertauschung wiederholt, wobei z'' [illegible] z' zurückgeht, so erhält man:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}{z' \cos [illegible] d}; \quad (10.)$$

$$\text{co}[illegible] \quad (11.)$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\overset{3}{S}\,[illegible]}{\overset{1}{S}\,[illegible]}$$

$$\sin C = \frac{2\sqrt{S\,S\,[illegible]\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}}{z\,[illegible]}; \quad (13.)$$

Endlich ist: $\sin^2 \tfrac{1}{2} D = \dfrac{S\,S\,[illegible]\,\overset{13}{K}}{z'' \cos \tfrac{1}{2} d \cos \tfrac{1}{2} a}$; (14.)

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} D = \frac{\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{14}{K}}{z'' \cos \tfrac{1}{2} d \cos \tfrac{1}{2} a}; \quad (15.)$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} D = \frac{\overset{1}{S}\,\overset{4}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}}{\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{14}{K}}; \quad (16.)$$

$$\sin D = \frac{2\sqrt{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}}{z'' \cos \tfrac{1}{2} d \cos \tfrac{1}{2} a}; \quad (17.)$$

Zus. 1. Addirt man die Gleichungen (1.) und (2.), so ergiebt sich: $1 = \dfrac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K} + \overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}}{z' \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b}$

oder $z' \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b = \overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K} + \overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}$, welcher Ausdruck in den Formeln 1, 2, 4, 5 substituirt werden kann. Eben so ist für die übrigen Formeln:

$$= \frac{-4\,C^{1}C^{2}C^{3}C^{4}C^{12}C^{13}C^{14}}{(C^{12}C+C^{13}C^{14})(C^{13}C+C^{12}C^{14})(C^{14}C+C^{12}C^{13})};$$

Das umgeschriebene Viereck geht in ein Dreieck über, wenn zwei von den Punkten, in welchen die Seiten desselben den eingeschriebenen Kreis berühren, in einen Punkt zusammengehen. Die Bogen, welche in jenen Punkten den Kreis berühren, fallen dann in einen Bogen zusammen und der Winkel, welchen sie einschließen wird $= \pi$. Um also vom umgeschriebenen Vierecke auf das Dreieck überzugehen, braucht man nur einen Winkel des Viereckes $= \pi$ zu setzen. Dies läßt sich auch auf folgende Weise darthun. Das eingeschriebene Viereck wird zum Dreiecke, wenn eine Seite desselben, etwa d, $= 0$ gesetzt wird. Das Polarviereck desselben — das umgeschriebene — ist dann ebenfalls in ein Dreieck übergegangen. Da nun der Winkel $D' = \pi - d$ ist, so folgt für $d = 0$, daß $D' = \pi$ geworden ist. Man kann also aus den Formeln dieses §. die entsprechenden für das Dreieck herleiten, wenn der Winkel $D' = \pi$ gesetzt wird. Die Winkel des dadurch bedingten Dreieckes sind A', B', C', denen bezüglich die Seiten b', $(c'+d')$, a' gegenüber stehen. Um die bei Dreiecken gewöhnliche Bezeichnung beizubehalten, schreibe man a für b', b für $(c'+d')$, c für a'. Dann ist für c' zu setzen $\frac{1}{2}(a+b-c)$ und $\frac{1}{2}(c+b-a)$ für d'.

So lassen sich aus dem gegenwärtigen §. und aus §. 72. die meisten der in §. 28. — §. 33. entwickelten Formeln ableiten.

Bestimmung sphärischer Flächenräume, die von Nebenkreisen begränzt werden.

§. 76.

Aufgabe. Den sphärischen Flächenraum eines Nebenkreises durch den sphärischen Radius desselben auszudrücken.

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \sin\tfrac{1}{2}(c-a)\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b}}. \quad (18.)$$

Durch Verwechſelung jeder Seite mit der folgenden ergiebt ſich hieraus:

$$\sin\tfrac{1}{2}(B-C) = \sin\tfrac{1}{2}(d-b)\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d}}; \quad (19.)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(C-D) = \sin\tfrac{1}{2}(a-c)\sqrt{\frac{\overset{2}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c}}; \quad (20.)$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(D-A) = \sin\tfrac{1}{2}(b-d)\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,K\,\overset{13}{K}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d}}; \quad (21.)$$

Aus den Formeln (18.) und (20.) folgt, daß:

$\sin\tfrac{1}{2}(A-B) = -\sin\tfrac{1}{2}(C-D)$;

oder $A-B = D-C$

oder $A+C = B+D$ iſt. (g. S. §. 75, Zuſ. 3.)

Daſſelbe geht aus (19.) und (21.) hervor.

Aus den Formeln (2.) und (7.) erhält man:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{4}{S}\,K}{\cos\tfrac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c}};$$

aus (1.) und (6.)

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B = \frac{\overset{2}{S}\,\overset{13}{K}}{\cos\tfrac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c}};$$

Daher iſt: $(\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B + \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B)$ oder

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\overset{4}{S}\,K + \overset{2}{S}\,\overset{13}{K}}{\cos\tfrac{1}{2}b}\sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{12}{K}\,\overset{14}{K}}{z'\,z''\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c}};$$

Hier läßt ſich $\overset{4}{S}\,K + \overset{2}{S}\,\overset{13}{K}$ noch zuſammenziehen. Es iſt nämlich

$$\overset{4}{S}\,K + \overset{2}{S}\,\overset{13}{K} = \sin\tfrac{1}{2}(a+b+c-d)\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c+d) + \sin\tfrac{1}{2}(a-b+c+d)\cos\tfrac{1}{2}(a-b+c-d);$$

$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)-\sin\tfrac{1}{2}d}{2} + \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)+\sin\tfrac{1}{2}d}{2};$$

$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)+\sin\tfrac{1}{2}(a-b+c)}{2};$$

Beschreibt man also mit einem Radius, der gleich der Höhe Mc des Kugelabschnittes ist, einen Kreis; so ist der Flächeninhalt desselben die Differenz zwischen der sphärischen Oberfläche des Kugelabschnittes und der Basis desselben.

Zus. 3. Die Peripherie P des Nebenkreises ABD ist $=2\pi Ac=2\pi \sin r$. Daher ist:

$$\frac{K}{P}=\frac{4\pi \sin^2 \frac{1}{2}r}{2\pi \sin r}=\tang \tfrac{1}{2}r.$$

Daraus ist ersichtlich, daß der sphärische Flächeninhalt eines Nebenkreises kleiner als der Umfang desselben ist; vorausgesetzt nämlich, daß, wie dies am natürlichsten ist, unter dem sphärischen Flächenraume eines Nebenkreises von den beiden Theilen, in welche die Kugelfläche durch diesen Kreis zerfällt, der kleinere verstanden wird, für welchen dann der sphärische Halbmesser immer $<\frac{1}{2}\pi$ ist.

Ist $r=\frac{1}{2}\pi$, so ist $\tang \frac{1}{2}r=1$; also $K=P$; d. h. die halbe Kugelfläche dem Umfange eines Hauptkreises gleich.

Zus. 4. Beschreibt man um M einen zweiten Kreis A'B'D' (Fig. 36.), dessen sphär. Flächenraum mit K', dessen sphär. Radius mit r' bezeichnet sei, so ist $K'=2\pi(1-\cos r')$, mithin:

$$K'-K=2\pi(\cos r-\cos r');$$

Die Differenz K'—K ist aber die zwischen den Parallelkreisen ABD, A'B'D' enthaltene Kugelzone. Wird diese mit z bezeichnet, so ist demnach:

$$z=2\pi(\cos r-\cos r')=4\pi(\sin^2\tfrac{1}{2}r-\sin^2\tfrac{1}{2}r');$$
$$=4\pi \sin \tfrac{1}{2}(r'+r)\sin\tfrac{1}{2}(r'-r).$$

Uebrigens gelten diese Ausdrücke überhaupt für die Differenz zweier Kreise von den Radien r, r', die also nicht parallel zu sein brauchen.

Die Differenz der Kreis**ebnen** von ABD, A'B'D' ist:

$$=\pi \sin^2 r'-\pi \sin^2 r=\pi(\sin^2 r'-\sin^2 r);$$
$$=\pi \sin(r'+r)\sin(r'-r).$$

Wird diese mit ζ bezeichnet, so erhält man:

$$\zeta=4\pi \sin\tfrac{1}{2}(r'+r)\sin\tfrac{1}{2}(r'-r)\cos\tfrac{1}{2}(r'+r)\cos\tfrac{1}{2}(r'-r);$$

Zuſ. 4. Aus $\sin\frac{1}{2}(A-B)=\sin\frac{1}{2}(c-a)\sqrt{\frac{S^{2}\,S^{4}\,K^{1}\,K^{3}}{z'\,z''\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}}$;

geht hervor, daß $A\gtreqless B$ iſt, jenachdem $c\gtreqless a$ iſt; daß alſo von zwei Winkeln des eingeſchriebenen Viereckes, welche an einer gemeinſchaftlichen Seite liegen, derjenige der größere iſt, deſſen zweiter Schenkel kleiner iſt, als der zweite Schenkel des andern Winkels.

Man kann alle diejenigen Seiten eines Viereckes, oder überhaupt eines Polygones, welche nicht Schenkel eines gewiſſen Winkels in [illegible]en ſind, als dieſem Winkel gegenüberſtehende betra[illegible]m Winkel A des eingeſchriebenen Viereckes, der [illegible] a, b hat, ſtehen alſo gegenüber die Seiten c, d; [illegible]nkel B ſtehen gegenüber a und d. Jenachdem nun $c\gtreqless a$, auch $c+d\gtreqless a+d$. Daher läßt ſich obiger Satz ſo aus[illegible]hen:

Unter den an einer gemeinſchaftlichen Seite liegenden Winkeln des eingeſchriebenen Viereckes iſt derjenige der größere, welchem eine größere Summe von Seiten gegenüber ſteht.

Dieſer Satz gilt übrigens, wie ſich leicht nachweiſen läßt, von allen eingeſchriebenen Polygonen, zu denen auch jedes Dreieck gehört.

Zuſ. 5. Aus den Formeln 1 — 4 und 10 — 13 erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C=\frac{S^{1}\,S^{2}}{z'}\sqrt{\frac{K^{1}\,K^{2}\,K^{3}\,K^{4}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C=\frac{S^{3}\,S^{4}}{z'}\sqrt{\frac{K^{1}\,K^{2}\,K^{3}\,K^{4}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}};$$

daraus folgt: $(\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C)$ oder:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C)=\frac{S^{1}\,S^{2}+S^{3}\,S^{4}}{z'}\sqrt{\frac{K^{1}\,K^{2}\,K^{3}\,K^{4}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}};$$

Nach §. 71, Zuſ. 2. iſt $z' = S^1 S^2 + S^3 S^4$; alſo

$$\frac{S^1 S^2 + S^3 S^4}{z'} = 1\,;\ \text{folglich}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \sqrt{\frac{K K^{12} K^{13} K^{14}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\,; \quad (30.)$$

Dieſelben Formeln 1—4 und 10—13 ergeben:

$$\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{K K^{12}}{z'}\sqrt{\frac{S^1 S^2 S^3 S^4}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\,;$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}C = \frac{K^{13} K^{14}}{z'}\sqrt{\frac{S^1 S^2 S^3 S^4}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\,;$$

daraus folgt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{K K^{12} - K^{13} K^{14}}{z'}\sqrt{\frac{S^1 S^2 S^3 S^4}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\,;$$

Nach §. 71, Zuſ. 2. iſt: $\frac{K K^{12} - K^{13} K^{14}}{z'} = -1\,;$

folglich iſt:

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{S^1 S^2 S^3 S^4}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}}\,; \quad (31.)$$

Aus (30.) und (31.) erhält man:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{K K^{12} K^{13} K^{14}}{S^1 S^2 S^3 S^4}}\,; \quad (32.)$$

$$\text{und}\quad \sin(A+C) = -2\frac{\sqrt{S^1 S^2 S^3 S^4 K K^{12} K^{13} K^{14}}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}\,; \quad (33.)$$

Da in den Formeln (30.), (31.), (32.) (33.) die Seiten des Viereckes ſymmetriſch enthalten ſind, ſo hat die Vertauſchung derſelben keinen Einfluß auf die Formeln. Man erhält daher dieſelben Ausdrücke für

$\sin\frac{1}{2}(B+D)$, $\cos\frac{1}{2}(B+D)$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+D)$, $\sin(B+D)$;

woraus ſich wieder der Satz ergiebt, daß $A+C = B+D$

ist. Die [illegible]egativen Vorzeichen in (31.), (32.), (33.) deuten an, daß di[illegible] Summe je zweier Diagonalwinkel $> \pi$ ist.

§. 73.

Aufgabe. Den Flächenraum des eingeschriebenen Viereckes durch die Seiten desselben auszudrücken.

Auflösung. Bedeutet Q den Flächenraum des Viereckes, so ist $Q = A + B + C + D - 2\pi$; oder, da $A + C = B + D$ ist, $Q = 2(A + C) - 2\pi$; oder $\frac{1}{2}Q = A + C - \pi$ und $\frac{1}{4}Q = \frac{1}{2}($[illegible] n[illegible]in:

$\sin\frac{1}{4}Q = -\text{co}$[illegible] $\text{os}\frac{1}{4}Q = \sin\frac{1}{2}(A + C)$;

$\text{tang}\frac{1}{4}Q =$ [illegible] $\text{in}\frac{1}{2}Q = -\sin(A + C)$;

Aus den Forn[illegible]3, des vorigen Zus. erhält man also für [illegible]ie Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{4}Q \quad [illegible] \quad \frac{\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}}{[illegible]\,b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d};$$

$$\cos\tfrac{1}{4}Q = \sqrt{\frac{K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d}};$$

$$\text{tang}\tfrac{1}{4}Q = \sqrt{\frac{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}}{K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}};$$

$$\sin\tfrac{1}{2}Q = \frac{2\sqrt{\overset{1}{S}\,\overset{2}{S}\,\overset{3}{S}\,\overset{4}{S}\,K\,\overset{12}{K}\,\overset{13}{K}\,\overset{14}{K}}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d};$$

Zus. Setzt man die Seite $d = 0$, so wird das Viereck ein Dreieck aus den Seiten a, b, c und die Formeln für $\sin\frac{1}{4}Q$, $\cos\frac{1}{4}Q$, $\text{tang}\frac{1}{4}Q$, $\sin\frac{1}{2}Q$ verwandeln sich in die §. 41. für $\sin\frac{1}{4}T$, $\cos\frac{1}{4}T$, $\text{tang}\frac{1}{4}T$, $\sin\frac{1}{2}T$ aufgestellten Formeln. Eben so lassen sich aus den Formeln des vorigen §. die entsprechenden Formeln für die Winkel des Dreieckes ableiten, wenn man eine Seite des Viereckes $= 0$ macht.

§. 74.

Aufgabe. Den sphärischen Radius des um

Drückt man h, h' durch die sphär. Radien r, r' der Parallelkreise ABD, A'B'D' aus, so erhält man:
$A'B'AB = \alpha(\cos r - \cos r') = 2\alpha \sin \frac{1}{2}(r'-r) \sin \frac{1}{2}(r'+r)$.
woraus sich der §. 76, Zus. 4. für die Kugelzone bemerkte Ausdruck ableiten läßt, wenn man $\alpha = 2\pi$ setzt.

Zus. 3. Nimmt man den Nebenbogen EF = AB und zieht A'E, B'F, so ist das Viereck A'B'EF = A'B'AB. Denn man ziehe die sphär. Radien ME, MF. In den Dreiecken MEA', MFB' ist ME = MF, MA' = MB' und Winkel A'ME = B'MF, weil sie auf gleichen Nebenbogen AE, BF stehen. Daraus folgt, daß A'E = B'F und Winkel EA'M = FB'M ist. Legt man nun das Afterdreieck B'BF auf A'AE, so daß B auf A, B' auf B fällt, so fällt der Bogen B'F auf A'E und F auf E. Die Dreiecke decken sich also, mithin sind die Flächenräume derselben gleich. Hieraus folgt aber, daß A'B'EF = A'B'AB ist. Daher ist auch:
$A'B'EF = \alpha(\cos r - \cos r') = 2\alpha \sin \frac{1}{2}(r'+r) \sin \frac{1}{2}(r'-r)$;
wo α den relativen Werth der parallelen und ähnlichen Nebenbogen A'B', EF; r', r die zugehörigen sphärischen Radien andeuten. Durch (r' — r) wird die Höhe des Viereckes ausgedrückt.

Zus. 4. Auf der andern Seite des Hauptkreises abd sei A''B''D'' ein Parallelkreis zu ABD, der in A'', B'' von den Halbkreisen MAM', MBM' geschnitten wird. Für den Flächenraum des Viereckes A''B''AB hat man nach Zus. 2. die Formel:

$$A''B''AB = \alpha(\cos MA - \cos MA'') = \alpha(\cos MA + \cos M'A'');$$

oder, wenn MA wieder mit r, MA'' mit r' bezeichnet wird,

$$A''B''AB = \alpha(\cos r + \cos r') = 2\alpha \cos \tfrac{1}{2}(r + r') \cos \tfrac{1}{2}(r - r');$$

Die sphärische Höhe dieses Viereckes ist AA''. Bezeichnet man sie mit h, so ist $r + r' = \pi - h$; daher folgt aus vorstehender Formel:

$$A''B''AB = 2\alpha \sin \tfrac{1}{2}h \cdot \cos \tfrac{1}{2}(r - r').$$

§. 75.

Das um einen Kreis beſchriebene Viereck iſt das Polar-
es eingeſchriebenen. Daher laſſen ſich die für das
vickelten Formeln auf das umgeſchriebene leicht
Bezeichnet man wie oben mit a, b, c, d die
..it A, B, C, D die Winkel des eingeſchriebenen
; mit a′, b′, c′, d′, A′, B′, C′, D′ die Seiten
und Winkel des umgeſchriebenen, ſo daß A′ zwiſchen d′, a′;
B′ zwiſchen a′, b′; C′ zwiſchen b′, c′ und D′ zwiſchen c′, d′
liegt; ſo iſt:

$a=\pi-A'$; $b=\pi-B'$; $c=\pi-C'$; $d=\pi-D'$;
$A=\pi-a'$; $B=\pi-b'$; $C=\pi-c'$; $D=\pi-d'$.

daher iſt: $\sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}a'$; $\cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}a'$ u. ſ. w.

$$z=\cos\tfrac{1}{2}A'\cos\tfrac{1}{2}C'+\cos\tfrac{1}{2}B'\cos\tfrac{1}{2}D';$$
$$z'=\cos\tfrac{1}{2}A'\cos\tfrac{1}{2}B'+\cos\tfrac{1}{2}C'\cos\tfrac{1}{2}D';$$
$$z''=\cos\tfrac{1}{2}B'\cos\tfrac{1}{2}C'+\cos\tfrac{1}{2}D'\cos\tfrac{1}{2}A';$$

Ferner iſt:

$\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)=\cos\frac{1}{4}(-A'+B'+C'+D')$;
$\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)=\cos\frac{1}{4}(A'-B'+C'+D')$; u. ſ. w.
$\cos\frac{1}{4}(a+b+c+d)=-\cos\frac{1}{4}(A'+B'+C'+D')$;
$\cos\frac{1}{4}(a+b-c-d)=\cos\frac{1}{4}(A'+B'-C'-D')$; u. ſ. w.

Bezeichnet man alſo $\cos\frac{1}{4}(-A'+B'+C'+D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'-B'+C'+D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'+B'-C'+D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'+B'+C'-D')$ reſp. durch $\overset{1}{C}$, $\overset{2}{C}$, $\overset{3}{C}$, $\overset{4}{C}$; und $\cos\frac{1}{4}(A'+B'+C'+D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'+B'-C'-D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'-B'+C'-D')$, $\cos\frac{1}{4}(A'-B'-C'+D')$ durch C, $\overset{12}{C}$, $\overset{13}{C}$, $\overset{14}{C}$; ſo iſt: $\overset{1}{S}=C$, $\overset{2}{S}=\overset{2}{C}$, $\overset{3}{S}=\overset{3}{C}$, $\overset{4}{S}=\overset{4}{C}$; $K=-C$, $\overset{12}{K}=\overset{12}{C}$, $\overset{13}{K}=\overset{13}{C}$, $\overset{14}{K}=\overset{14}{C}$.

Endlich ſei $\cos\frac{1}{2}A'\cos\frac{1}{2}C'+\cos\frac{1}{2}B'\cos\frac{1}{2}D'$ durch Z;
$\cos\frac{1}{2}A'\cos\frac{1}{2}B'+\cos\frac{1}{2}C'\cos\frac{1}{2}D'$ durch Z′;
$\cos\frac{1}{2}B'\cos\frac{1}{2}C'+\cos\frac{1}{2}D'\cos\frac{1}{2}A'$ durch Z″ bezeichnet.

Hiernach laſſen ſich aus §. 72. für das umgeſchriebene Viereck folgende Formeln, in denen die Seiten des Viereckes durch die Winkel ausgedrückt werden, ganz bequem abſchreiben.

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a' = \frac{-\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}}{Z'\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'};$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a' = \frac{\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{Z'\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'};$$

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}a' = \frac{-\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}}{\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}$$

$$\sin a' = \frac{2\sqrt{-\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}}{Z'\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'};$$

$$\cos a' = \frac{\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C} + \overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{Z'\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'}.$$

Für die Seiten b′, c′, d′ hat man in den vorstehenden Formeln nur die gehörige Vertauschung der Buchstaben A′, B′, C′, D′ und der Marken ¹, ², ³, ⁴, (′), (″), vorzunehmen, wobei zu bemerken ist, daß nach §. 71, Zus. 2. für $\overset{23}{C}$, $\overset{24}{C}$, $\overset{34}{C}$ geschrieben werden kann: $\overset{14}{C}$, $\overset{13}{C}$, $\overset{12}{C}$.

Aus Zus. 3. desselben §. erhält man:

$$\sin\tfrac{1}{2}(b'-a') = \sin\tfrac{1}{2}(A'-C')\sqrt{\frac{-\overset{2}{C}\overset{4}{C}C\overset{13}{C}}{Z'Z''\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}C'}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(b'-a') = \sin\tfrac{1}{2}(A'+C')\sqrt{\frac{\overset{1}{C}\overset{3}{C}\overset{12}{C}\overset{14}{C}}{Z'Z''\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}C'}};$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(b'-a') = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(A'-C')}{\sin\tfrac{1}{2}(A'+C')}\sqrt{\frac{-\overset{2}{C}\overset{4}{C}C\overset{13}{C}}{\overset{1}{C}\overset{3}{C}\overset{12}{C}\overset{14}{C}}};$$

Aus Zus. 5. folgt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(a'+c') = \sqrt{\frac{-C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'\sin\tfrac{1}{2}C'\sin\tfrac{1}{2}D'}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a'+c') = \sqrt{\frac{\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}}{\sin\tfrac{1}{2}A'\sin\tfrac{1}{2}B'\sin\tfrac{1}{2}C'\sin\tfrac{1}{2}D'}};$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a'+c') = \sqrt{\frac{-C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}}};$$

$$\sin(a'+c') = \frac{2\sqrt{-\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}}{\sin\frac{1}{2}A'\sin\frac{1}{2}B'\sin\frac{1}{2}C'\sin\frac{1}{2}D'};$$

Der Symmetrie dieſer Formeln zufolge iſt $a'+c' = b'+d'$, was ſchon aus $A+C = B+D$ hervorgeht.

Aus Zuſ. 4. des §. 72. ergiebt ſich für das umgeſchriebene Viereck und überhaupt für jedes umgeſchriebene Polygon der Satz:

Von zwei Seiten eines umgeſchriebenen Viereckes (oder Polygones), welche einen und denſelben Winkel einſchließen, iſt diejenige die größere, welcher eine größere Summe von Winkeln gegenüber ſteht —

wobei jeder Winkel, der nicht an einer Seite liegt, als ein derſelben gegenüber liegender betrachtet wird.

Da jedes Dreieck ſowohl ein eingeſchriebenes als ein umgeſchriebenes ſein kann, ſo gelten von demſelben beide Sätze, daß dem größeren Winkel eine größere Summe von Seiten (d. h. eine größere Seite); und daß der größeren Seite eine größere Summe von Winkeln (d. h. ein größerer Winkel) gegenüber ſteht. Bei Figuren von mehr als drei Seiten iſt das nicht der Fall.

Endlich für den ſphäriſchen Radius ϱ des in das Viereck eingeſchriebenen Kreiſes, der der Polarkreis des um das Polarviereck mit dem Radius r beſchriebenen iſt, erhält man, da $\varrho = \frac{1}{2}\pi - r$ iſt, aus §. 74. die Formel:

$$\tan^2\varrho = \frac{-4\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{ZZ'Z''};$$

$$= \frac{-4\overset{1}{C}\overset{2}{C}\overset{3}{C}\overset{4}{C}C\overset{12}{C}\overset{13}{C}\overset{14}{C}}{(\overset{1}{C}\overset{3}{C}+\overset{2}{C}\overset{4}{C})(\overset{1}{C}\overset{2}{C}+\overset{3}{C}\overset{4}{C})(\overset{2}{C}\overset{3}{C}+\overset{4}{C}\overset{1}{C})};$$

$$= \frac{-4\,C^{1}C^{2}C^{3}C^{4}C^{12}C^{13}C^{14}}{(C^{12}C^{12}+C^{13}C^{13})(C^{13}C^{13}+C^{12}C^{12})(C^{14}C^{14}+C^{12}C^{12})};$$

Das umgeschriebene Viereck geht in ein Dreieck über, wenn zwei von den Punkten, in welchen die Seiten desselben den eingeschriebenen Kreis berühren, in einen Punkt zusammengehen. Die Bogen, welche in jenen Punkten den Kreis berühren, fallen dann in einen Bogen zusammen und der Winkel, welchen sie einschließen wird $= \pi$. Um also vom umgeschriebenen Vierecke auf das Dreieck überzugehen, braucht man nur einen Winkel des Viereckes $= \pi$ zu setzen. Dies läßt sich auch auf folgende Weise darthun. Das eingeschriebene Viereck wird zum Dreiecke, wenn eine Seite desselben, etwa d, $= 0$ gesetzt wird. Das Polarviereck desselben — das umgeschriebene — ist dann ebenfalls in ein Dreieck übergegangen. Da nun der Winkel $D' = \pi - d$ ist, so folgt für $d = 0$, daß $D' = \pi$ geworden ist. Man kann also aus den Formeln dieses §. die entsprechenden für das Dreieck herleiten, wenn der Winkel $D' = \pi$ gesetzt wird. Die Winkel des dadurch bedingten Dreieckes sind A', B', C', denen bezüglich die Seiten b', (c' + d'), a' gegenüber stehen. Um die bei Dreiecken gewöhnliche Bezeichnung beizubehalten, schreibe man a für b', b für (c' + d'), c für a'. Dann ist für c' zu setzen $\frac{1}{2}(a+b-c)$ und $\frac{1}{2}(c+b-a)$ für d'.

So lassen sich aus dem gegenwärtigen §. und aus §. 72. die meisten der in §. 28. — §. 33. entwickelten Formeln ableiten.

Bestimmung sphärischer Flächenräume, die von Nebenkreisen begränzt werden.

§. 76.

Aufgabe. Den sphärischen Flächenraum eines Nebenkreises durch den sphärischen Radius desselben auszudrücken.

Auflösung. Es sei (Fig. 35.) M der Mittelpunkt eines Nebenkreises ABD und durch C, den Mittelpunkt der Kugel, die Achse desselben, MM', gezogen, die in dem Mittelpunkte c der Kreisebne auf derselben senkrecht steht. Die sphärische Oberfläche des Kugelabschnittes ABDM ist nun einer Kugelzone gleich, welche gleiche Höhe mit jenem Abschnitte hat; — also gleich dem Produkte aus der Peripherie eines Hauptkreises in die Höhe Mc des Kugelabschnittes. Die Peripherie eines Hauptkreises ist nun $= 2\pi$, wenn der Kugelradius $= 1$ genommen wird. Wird also der sphärische Flächenraum ABDM mit K bezeichnet, so ist $K = 2\pi . Mc$.

Nun ist Cc der Kosinus des Bogens MA, der als der sphärische Radius des Nebenkreises mit r bezeichnet werde. Daher ist $Mc = MC - Cc = 1 - \cos r$; mithin:

$$K = 2\pi(1 - \cos r);$$
$$= 4\pi \sin^2 \tfrac{1}{2} r;$$

Zus. 1. Der Flächenraum der Kugel ist $= 4\pi$. Zieht man hiervon den sphär. Flächenraum K des Nebenkreises ABD ab, so bleibt für den Rest:

$$M'ABD = 4\pi - 2\pi(1 - \cos r)$$
$$= 2\pi(1 + \cos r);$$

Da $r = MA = \pi - M'A$ ist, so ist $\cos r = -\cos M'A$; mithin:

$$M'ABD = 2\pi(1 - \cos M'A),$$

welche Formel mit der obigen $K = 2\pi(1 - \cos r)$ identisch ist und deren Gültigkeit auch für den Fall, wenn der sphärische Radius eines Nebenkreises $> \frac{1}{2}\pi$ genommen wird, beweist.

Zus. 2. Der Flächeninhalt der Kreisebne ABD, deren Halbmesser $Ac = \sin r$ ist, ist $= \pi Ac^2 = \pi \sin^2 r$. Wird derselbe mit k bezeichnet, so folgt aus:

$$K = 2\pi(1 - \cos r) \text{ und } k = \pi \sin^2 r$$

durch Subtraktion:

$$K - k = \pi(2 - 2\cos r - \sin^2 r) = \pi(1 - 2\cos r + \cos^2 r)$$
$$= \pi(1 - \cos r)^2 = \pi . Mc^2.$$

Sehne desto kleiner werden, je schiefer sie auf der Sehne stehen; so haben diejenigen, welche größer als A sind, ihre Scheitel auf dem Bogen ADA'; diejenigen welche kleiner als A sind, innerhalb AC und A'B.

Der sphär. Peripheriewinkel in dem kleinern Abschnitte BEC ist immer größer, als der Sehnenwinkel desselben Abschnittes. Denn wird letzterer mit E bezeichnet; so ist $E+A=\pi$; aber $E+A>\pi$; also, da $A=A$; muß $E>E$ sein.

Ist BC ein Durchmesser, so fallen die durch B, C und durch M beschriebenen Gegenkreise in einen Hauptkreis zusammen; der Bogen AC verschwindet und fällt in die Tangente im Endpunkte des Durchmessers. Der Peripheriewinkel BAC ist dann der kleinste auf dem Durchmesser, der ein Rechter, also gleich dem Sehnenwinkel des Halbkreises ist (g. S. §. 75, Zus. 8.).

§. 80.

Aufgabe. Die Winkel des zu einem gegebenen sphärischen Dreiecke gehörigen Sehnendreieckes durch Bogen auf der Kugelfläche darzustellen.

Auflösung. Es sei das sphärische Dreieck ABC (Fig. 37.) gegeben. Um den Winkel A des zugehörigen Sehnendreieckes auf die verlangte Weise darzustellen, verlängere man die Seiten AB, AC bis zu ihrem zweiten Durchschnitte in A'; halbire die Verlängerungen BA', CA' in E, F; so ist der Bogen $EF = A$.

Beweis 1. In dem Dreiecke A'EF ist:

$$\cos EF = \cos A' . \sin EA' . \sin FA' + \cos EA' . \cos FA';$$

Da nun BA', CA', die Supplemente von BA, CA oder c, b sind; so ist $EA' = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}c$; $FA' = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}b$; also $\cos EF = \cos A' \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c + \sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c$. Nach vorigem §. ist aber auch $\cos A$ demselben Ausdrucke gleich; also ist $EF = A$.

Beweis 2. Der um das Dreieck ABC beschriebene

daher $\frac{z}{\zeta} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}(r'+r)\cos\frac{1}{2}(r'-r)}$.

Nach Zuſ. 1. kann $A'M > \frac{1}{2}\pi$ ſein, ohne daß die Formel $K' = 2\pi(1-\cos r')$ ſich ändert. Daher iſt der für z angegebene Ausdruck gültig, die Kreiſe, durch welche die Zone begränzt wird, mögen auf einer und derſelben Kugelhälfte liegen, oder nicht.

Zuſ. 5. Iſt A″B″D″ (Fig. 36.) der Gegenkreis von ABD, ſo hat man nach vorigem Zuſ. für die zwiſchen denſelben enthaltenen Zone die Formel:

$$z = 2\pi(\cos MA - \cos MA'').$$

Da hier aber $MA'' = \pi - MA$, alſo $\cos MA'' = -\cos MA$ iſt, ſo erhält man für die zwiſchen Gegenkreiſen enthaltene Zone den Ausdruck:

$$z = 4\pi\cos r.$$

Da der Abſtand AA″ der Gegenkreiſe, den man als die ſphäriſche Höhe der Zone betrachten kann, das Supplement von 2r, alſo, wenn derſelbe mit h bezeichnet wird, $r = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}h$ iſt, ſo erhält man den Inhalt der Zone durch die Höhe derſelben ausgedrückt in der Formel:

$$z = 4\pi\sin\tfrac{1}{2}h.$$

§. 77.

Lehrſatz. Die Differenz der ſphäriſchen Flächenräume zweier Polarkreiſe iſt der Differenz ihrer Umfänge gleich.

Beweis. Es ſeien (Fig. 36.) ABD und A′B′D′ zwei Polarkreiſe, deren ſphär. Radien MA, MA′ durch r, r′, und deren Flächenräume durch K, K′ bezeichnet ſeien. Nach vorigem §. iſt $K = 2\pi(1-\cos r)$; $K' = 2\pi(1-\cos r)$; daher $K'-K = 2\pi(\cos r - \cos r')$. Da nun $r' = \frac{1}{2}\pi - r$ iſt (g. S. §. 66.), ſo folgt:

$$K'-K = 2\pi(\cos r - \sin r).$$

Bezeichnet man mit P, P′ die Peripherieen der Polarkreiſe, ſo iſt: $P = 2\pi\sin r$; $P' = 2\pi\sin r' = 2\pi\cos r$; daher:

4) $\sin v' = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin\mathfrak{A}}$;

5) $\cos v' = \frac{\tang\frac{1}{2}a}{\tang\mathfrak{A}}$;

6) $\cos v' = \sin r \sin\frac{1}{2}(C+B-A)$;

Um v' durch die Seiten des Dreieckes auszudrücken, setze man in (1.) für $\tang\frac{1}{2}(C+B-A)$ den Werth

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{g}$$

so erhält man:

7) $\cotg v' = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{g}.(\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1)$;

$= \frac{\sin\frac{1}{2}a}{g}.(\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-\sin^2\frac{1}{2}a)$;

Oder setzt man in (6.) für $\sin r$ und $\sin\frac{1}{2}(C+B-A)$ resp. die Werthe: $\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{g}$ (§. 59.)

und $\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$

so erhält man:

8) $\cos v' = \frac{\tang\frac{1}{2}a}{g}(\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1)$.

Aus (7.) und (8.) folgt:

9) $\frac{\cos v'}{\cotg v'} = \sin v' = \frac{g}{\cos\frac{1}{2}a.g}$;

Zus. Sind v'', v''' die Neigungswinkel des Sehnendreieckes mit den Seiten b, c so ist nach (3.):

$\sin v'' = \frac{\cos r}{\cos\frac{1}{2}b}$; $\sin v''' = \frac{\cos r}{\cos\frac{1}{2}c}$; daher:

$\sin v' : \sin v'' : \sin v''' = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}a} : \frac{1}{\cos\frac{1}{2}b} : \frac{1}{\cos\frac{1}{2}c}$.

Aus (6.) folgt eben so:

$\cos v' : \cos v'' : \cos v''' = \sin\frac{1}{2}(B+C-A) :$
$\sin\frac{1}{2}(A+C-B) : \sin\frac{1}{2}(A+B-C)$;

und aus (2.):

$\tang v' : \tang v'' : \tang v''' = \cos\mathfrak{A} : \cos\mathfrak{B} : \cos\mathfrak{C}$.

Zuſ. 1. Beſchreibt man um M als Pol den Hauptkreis abd, der in a, b von den verlängerten Radien MA, MB getroffen wird, ſo ergiebt ſich aus Obigem für den Sektor aMb — die Hälfte der Spindel MabM' — der Ausdruck:

aMb = α = Winkel aMb = Bogen ab. (Vergl. g. S. §. 49.)

Wird von der halben Spindel abM der Sektor ABM abgezogen, ſo bleibt das Viereck abAB übrig, ein durchaus rechtwinkliges, deſſen Grundſeite der Hauptbogen ab (= α) iſt, während aA als die ſphäriſche Höhe deſſelben betrachtet werden kann. Für den Flächenraum deſſelben findet ſich der Ausdruck:

$$abAB = \alpha - \alpha(1 - \cos r) = \alpha \cos r;$$

oder, wenn für α eine Grundſeite ab geſetzt wird:

$$abAB = ab.\cos r$$

Da die Höhe $aA = \frac{1}{2}\pi - r$ iſt, ſo erhält man auch:

$$abAB = \alpha \sin h = ab.\sin aA.$$

Setzt man in dieſen Formeln für α den Werth $\frac{a}{\sin r}$, oder $\frac{a}{\cos h}$, wo a = AB iſt, ſo ergiebt ſich:

$$abAB = \frac{a \cos r}{\sin r} = a \operatorname{cotg} r = a \operatorname{tang} h.$$

Zuſ. 2. Beſchreibt man um M den Parallelkreis A'B'D', der von den Quadranten aM, bM in A', B' geſchnitten wird, ſo iſt der Raum abA'B' ein Viereck wie oben abAB. Daher iſt:

$$abA'B' = \alpha.\sin aA' = \alpha.\sin h'$$

wenn aA' durch h' bezeichnet wird.

Zieht man abA'B' von abAB ab, ſo bleibt das Viereck A'B'AB, das auch lauter rechte Winkel enthält. Für den Flächenraum deſſelben ergiebt ſich der Ausdruck:

$$ABA'B' = \alpha \sin h - \alpha \sin h' = \alpha(\sin h - \sin h')$$
$$= 2\alpha \sin \tfrac{1}{2}(h - h') \cos \tfrac{1}{2}(h + h')$$

wo (h — h') d. i. AA' die Höhe des Viereckes beſtimmt.

$$-\cos V = \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\cos r\cos\varrho}{\cos\frac{1}{2}a} + \frac{(\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}a-1)}{2\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a}\sin r\sin\varrho;$$

Ferner iſt: $\cos r\cos\varrho = \frac{\sin r\sin\varrho}{\operatorname{tang} r\operatorname{tang}\varrho}$

$$= \frac{\sin r\sin\varrho\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c};\quad (\S.\ 60.)$$

daher $-\cos V = \Big(\frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}a} + \sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}a-1\Big)\frac{\sin r\sin\varrho}{2\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a};$

$$= \Big\{\cos\tfrac{1}{2}(c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) + \sin\tfrac{1}{2}a(\sin^2\tfrac{1}{2}c+\sin^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}a-1)\Big\}\frac{\sin r.\sin\varrho}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a};$$

$$= \Big\{\cos\tfrac{1}{2}(c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) + \sin\tfrac{1}{2}a(\cos^2\tfrac{1}{2}a-\cos\tfrac{1}{2}(c-b)\cos\tfrac{1}{2}(c+b))\Big\}\frac{\sin r\sin\varrho}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a};$$

$$= \frac{\{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)-\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(c+b)\}\cos\frac{1}{2}(c-b)+\sin\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a}.\sin r\sin\varrho;$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b)\cos\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a}.\sin r\sin\varrho;$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b)+\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.\sin r\sin\varrho;$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin c+\sin b)+\frac{1}{2}\sin a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.\sin r\sin\varrho;$$

$$= \frac{\sin a+\sin b+\sin c}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.\sin r\sin\varrho;\quad (2.)$$

Aus $\operatorname{tang} r\operatorname{tang}\varrho = \frac{2\sin^2 a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$

erhält man:

$$\frac{\sin r\sin\varrho}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos r\cos\varrho}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)};$$

Zieht man nach den Endpunkten E, F des Nebenbogens EF, der = AB genommen wurde, die Bogen A″E, A″F, so ist das Viereck A″B″EF = A″B″AB; was aus dem in Zuſ. 3. geführten Beweiſe erhellt. Denn die dort gemachten Schlüſſe bleiben dieſelben, wenn man A′, B′ gegen A″, B″ vertauſcht. Daher gelten die für den Flächenraum A″B″AB angegebenen Formeln auch für das ſchiefe Viereck A″B″EF.

Zuſ. 5. Sind ABD, A″B″D″ Gegenkreiſe, ſo iſt r′=r und der Nebenbogen A″B″=AB=EF.

Das Viereck A″B″EF iſt dann ein ſphäriſches Afterparallelogramm, deſſen Grundſeiten A″B″ und EF Nebenbogen ſind. Wird der Flächeninhalt deſſelben mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet, ſo erhält man aus der Formel A″B″AB = A″B″EF $= \alpha(\cos r + \cos r')$ (Zuſ. 4.) für $\mathfrak{P}$ den Ausdruck:

$$\mathfrak{P} = 2\alpha \cos r,$$

oder wenn man r durch die ſphär. Höhe des Parallelogrammes ausdrückt,

$$\mathfrak{P} = 2\alpha \sin \tfrac{1}{2} h.$$

Bezeichnet man den abſoluten Werth des Nebenbogens A″B″ wieder mit a, ſo iſt $\alpha = \frac{a}{\sin r} = \frac{a}{\cos \frac{1}{2} h}$, mithin:

$$\mathfrak{P} = 2a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} h.$$

Zuſ. 6. Durch die Diagonale A″F wird A″B″EF halbirt. Denn zieht man die (ſphär.) Sehnen der gleichen Nebenbogen A″B″, EF, welche in beiden Kreiſen gleiche Segmente s, s′ abſchneiden, ſo erhält man das (eigentliche) ſphäriſche Parallelogramm A″B″EF, das durch A″F halbirt wird. Nimmt man nun von den gleichen Dreiecken A″B″F, EFA″ die gleichen Segmente s, s′ weg, ſo bleiben die gleichen Afterdreiecke A″B″F, EFA″. Bezeichnet man deren Flächenräume durch $\mathfrak{T}$, ſo iſt $\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\mathfrak{P}$, daher:

$$\mathfrak{T} = a \sin \tfrac{1}{2} h \text{ und } \mathfrak{T} = a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} h.$$

Für ein anderes Afterdreieck $\mathfrak{T}'$ von derſelben Höhe h, deſſen Grundſeite a′ iſt, hat man demnach $\mathfrak{T}' = a' \operatorname{tang} \frac{1}{2} h$.

Hieraus folgt: $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}'} = \frac{a}{a'}$.

Solche Afterdreiecke von gleicher Höhe oder zwischen gleichen Gegenkreisen verhalten sich also wie die Nebenbogen, auf denen sie stehen.

Dasselbe gilt von den Afterparallelogrammen des vorigen Zusatzes.

Zus. 7. Bedeutet a die von A″ nach B″ gezogene sphär. Sehne, auf welcher als Grundseite das sphär. Dreieck A″B″F steht, dessen Flächenraum = T sei, so ist nach §. 62.

$$\sin\tfrac{1}{2}T = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h.$$

Nach vorigem Zus. ist $\mathfrak{T} = a \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h$.

Daraus folgt:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}T}{\mathfrak{T}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{a}.$$

Aus den Formeln: $\operatorname{tang}\frac{1}{2}T = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}h$ (§. 62.)

und ....., $\mathfrak{T} = \alpha \sin\frac{1}{2}h$ (Zus. 6.)

erhält man die merkwürdige Proportion:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}T}{\mathfrak{T}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}.$$

Zus. 8. Nimmt man von dem sphärischen Trapez ABCD (Fig. 33.) die sphär. Segmente, welche zwischen den Seiten AB, CD und den gleichnamigen Nebenbogen enthalten sind, weg; so behält man das zwischen den parallelen Nebenbogen AB, CD enthaltene Aftertrapez, das hier durch ABCD angedeutet werden soll. Durch die Diagonale AD wird dasselbe in die Afterdreiecke ABD, ACD zerlegt, die mit dem Trapeze gleiche Höhe h haben und deren Grundseiten — die Nebenbogen AB, CD — resp. durch a', a'' bezeichnet seien. Die relativen Werthe von a', a'', nämlich die Quotienten $\frac{a'}{\sin r}$, $\frac{a''}{\sin r}$ oder die Zentriwinkel von a', a'', seien durch α', α'' bezeichnet. Nach Zus. 6. ist nun:

$$ABD = a' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h; \quad ACD = a'' \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}h.$$

Daher ist $ABCD = (a' + a') \operatorname{tang}\frac{1}{2}h$.

Ferner ist $ABD = \alpha' \sin\frac{1}{2}h$; $ACD = \alpha'' \sin\frac{1}{2}h$;

folglich: $ABCD = (\alpha' + \alpha'') \sin\frac{1}{2}h$.

ist der Bogen FG, der die Seiten AC, BD pezes halbirt, $= \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha'')$; daher erhält man aus der zweiten Formel den Ausdruck:

$$ABCD = 2FG \cdot \sin \tfrac{1}{2}h.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich:

daß solche zwischen Gegenkreisen liegende Aftertrapeze von gleicher Höhe sich verhalten wie die Summen der Nebenbogen, zwischen denen sie enthalten sind.

Vom Sehnendreiecke.

§. 71.

Aufgabe. Die Winkel des zu einem sphärischen Dreiecke gehörigen Sehnendreieckes zu finden.

Auflösung. Um das sphärische Dreieck ABC Fig. 37. beschreibe man einen Kreis, dessen Ebne durch die Ebnen der Seiten des sphär. Dreieckes in den graden Linien AB, AC, BC, den Sehnen der gleichnamigen Bogen, geschnitten wird, welche Sehnen das gradlinige Dreieck ABC bilden, dessen Winkel gefunden werden sollen. Man ziehe durch den Pol M des Nebenkreises die sphärischen Durchmesser BB′, CC′, deren Ebnen, senkrecht stehend auf der Kreisebne ABC, mit dieser die gradlinigen Durchschnitte BB′, CC′ geben, welche sich im Mittelpunkte m der Kreisebne schneiden, also Durchmesser derselben sind. Der Zentriwinkel BmC, auf dessen Schenkeln Bm, Cm der Theil Mm der Achse des Nebenkreises senkrecht steht, ist der Neigungswinkel der Kreisebnen BMB′, CMC′, also dem sphärischen Winkel BMC gleich. Bezeichnen wir also die Winkel des Sehnendreieckes an den Ecken A, B, C der Reihe nach mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so ist der Peripheriewinkel $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}$BmC, also auch $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}$BMC. Fällt man nun in dem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke BMC das Perpendikel MD, so wird der Winkel an M halbirt und

es ist $\mathfrak{A} = BMD$. In dem rechtwinkligen Dreiecke BDM ist nun $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$; der Winkel MBD ist $= \frac{1}{2}(C+B-A)$; MD ist das Komplement des Neigungswinkels (v') der Ebne des Sehnendreieckes gegen die Ebne des Bogens BC, oder der Seite a (g. S. §. 45.). Man erhält demnach aus diesem Dreiecke Gleichungen zwischen $\mathfrak{A}$ und a, $(C+B-A)$, v' und dem sphär. Radius r des umgeschriebenen Kreises; nämlich:

1) $\cos BMD = \cos BD \cdot \sin MBD$,

oder $\cos\mathfrak{A} = \cos\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}(C+B-A)$;

2) $\sin BMD = \frac{\cos MBD}{\cos MD}$

oder $\sin\mathfrak{A} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin v'}$;

3) $\operatorname{tang} BMD = \frac{\operatorname{tang} BD}{\sin BD}$

oder $\operatorname{tang}\mathfrak{A} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\cos v'}$;

4) $\sin\mathfrak{A} = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin r}$;

5) $\cos\mathfrak{A} = \operatorname{cotg} v' \operatorname{cotg} r$;

6) $\operatorname{cotg}\mathfrak{A} = \cos r \operatorname{tang}\frac{1}{2}(C+B-A)$.

Setzt man in (1.) für $\sin\frac{1}{2}(C+B-A)$ den Werth

$$\frac{\sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}b + \cos\frac{1}{2}c \cos\frac{1}{2}b \cos A}{\cos\frac{1}{2}a} \quad (\text{§. 37, 26.})$$

so erhält man:

7) $\cos\mathfrak{A} = \cos A \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c + \sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c$.

Hieraus ist ersichtlich, daß, und unter welcher Bedingung, $\mathfrak{A}$ kleiner, eben so groß oder größer als A sein kann. Setzt man in (1.) für $\sin\frac{1}{2}(C+B-A)$ den Werth

$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}c + \sin^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}a - 1}{4\sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}a} \quad (\text{§. 36, 20.})$$

so erhält man durch die Seiten ausgedrückt:

8) $\cos\mathfrak{A} = \frac{\sin^2\frac{1}{2}c + \sin^2\frac{1}{2}b - \sin^2\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}c}$.

Subſtituirt man in No. 4. für sin r den Ausdruck

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{g} \quad (\text{§. 59, Zuſ. 3.})$$

ſo erhält man ebenfalls durch die Seiten ausgedrückt:

$$9)\quad \sin\mathfrak{A} = \frac{q}{2\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.$$

Dieſe und die vorhergehende Formel ſind die bekannten Formeln der ebnen Trigonometrie, da die Seiten des Sehnendreieckes reſp. $2\sin\frac{1}{2}a$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}c$ ſind. Setzt man in (1.) für $\cos\frac{1}{2}a$ den §. 29, (1.) aufgeſtellten Werth, ſo erhält man durch die Winkel des ſphäriſchen Dreieckes ausgedrückt:

$$10)\ \cos\mathfrak{A} = \sin\tfrac{1}{2}(C+B-A)\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)\cos\frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin B\sin C}};$$

Zuſ. 1. Aus $\operatorname{cotg}\mathfrak{A} = \cos r.\tan\frac{1}{2}(C+B-A)$;
und $\operatorname{cotg}\mathfrak{B} = \cos r.\tan\frac{1}{2}(C+A-B)$;
$\operatorname{cotg}\mathfrak{C} = \cos r.\tan\frac{1}{2}(A+B-C)$;
folgt $\tan\mathfrak{A}:\tan\mathfrak{B}:\tan\mathfrak{C} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(C+B-A):\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(C+A-B):\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(A+B-C)$;

Zuſ. 2. Um unter den ſphär. Peripheriewinkeln, welche auf dem Bogen BC ſtehen, denjenigen zu finden, der dem Sehnenwinkel $\mathfrak{A}$ gleich iſt; konſtruire man zwei Gegenkreiſe, den einen durch B und C, den andern durch den Mittelpunkt M. Letzterer ſchneidet den Nebenkreis ABC in zwei Punkten A und A′ (Fig. 39.). Zieht man nach einem von dieſen, etwa A, die Bogen BA, CA; ſo iſt der Winkel BAC$=\mathfrak{A}$. Denn in dem Dreiecke ABC iſt die Winkelſumme $A+B+C = 2A+U$, wenn durch U die Summe der Winkel MBC, MCB bezeichnet wird. In dem Dreiecke BMC iſt die Winkelſumme $= BMC+U = 2\mathfrak{A}+U$. Da nun die Dreiecke ABC, MBC zwiſchen einerlei Gegenkreiſen liegen, ſo ſind die Flächenräume, alſo auch die Winkelſummen beider gleich. Aus $2A+U = 2\mathfrak{A}+U$ folgt nun: $A = \mathfrak{A}$. Ebenſo iſt $BA'C = \mathfrak{A}$.

Da die ſphär. Peripheriewinkel auf einer und derſelben

Sehne deſto kleiner werden, je ſchiefer ſie auf der Sehne ſtehen; ſo haben diejenigen, welche größer als $\mathfrak{A}$ ſind, ihre Scheitel auf dem Bogen ADA'; diejenigen welche kleiner als $\mathfrak{A}$ ſind, innerhalb AC und A'B.

Der ſphär. Peripheriewinkel in dem kleinern Abſchnitte BEC iſt immer größer, als der Sehnenwinkel deſſelben Abſchnittes. Denn wird letzterer mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet; ſo iſt $\mathfrak{E}+\mathfrak{A}=\pi$; aber $E+A>\pi$; alſo, da $A=\mathfrak{A}$; muß $E>\mathfrak{E}$ ſein.

Iſt BC ein Durchmeſſer, ſo fallen die durch B, C und durch M beſchriebenen Gegenkreiſe in einen Hauptkreis zuſammen; der Bogen AC verſchwindet und fällt in die Tangente im Endpunkte des Durchmeſſers. Der Peripheriewinkel BAC iſt dann der kleinſte auf dem Durchmeſſer, der ein Rechter, alſo gleich dem Sehnenwinkel des Halbkreiſes iſt (g. S. §. 75, Zuſ. 8.).

§. 80.

Aufgabe. Die Winkel des zu einem gegebenen ſphäriſchen Dreiecke gehörigen Sehnendreieckes durch Bogen auf der Kugelfläche darzuſtellen.

Auflöſung. Es ſei das ſphäriſche Dreieck ABC (Fig. 37.) gegeben. Um den Winkel $\mathfrak{A}$ des zugehörigen Sehnendreieckes auf die verlangte Weiſe darzuſtellen, verlängere man die Seiten AB, AC bis zu ihrem zweiten Durchſchnitte in A'; halbire die Verlängerungen BA', CA' in E, F; ſo iſt der Bogen $EF=\mathfrak{A}$.

Beweis 1. In dem Dreiecke A'EF iſt:

$$\cos EF=\cos A'.\sin EA'.\sin FA'+\cos EA'.\cos FA';$$

Da nun BA', CA', die Supplemente von BA, CA oder c, b ſind; ſo iſt $EA'=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}c$; $FA'=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}b$; alſo $\cos EF=\cos A'\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c+\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c$. Nach vorigem §. iſt aber auch $\cos\mathfrak{A}$ demſelben Ausdrucke gleich; alſo iſt $EF=\mathfrak{A}$.

Beweis 2. Der um das Dreieck ABC beſchriebene

Kreis ist einer der Gegenkreise, zwischen denen das Nebendreieck A'BC in Rücksicht der Grundseite BC liegt. Nach §. 63, Zus. 1. ist nun der Bogen EF, der die Mittelpunkte der Seiten BA', CA' verbindet, die Hälfte des Zentriwinkels BMC, der auf der Grundseite BC steht; und, wie im vorigen §. erwiesen wurde, ist der Sehnenwinkel A ebenfalls die Hälfte desselben Zentriwinkels. Daraus folgt, daß EF = A.

Zus. Vollendet man die Hauptkreise, deren Bogen das Dreieck ABC bilden, so erhält man (Fig. 40.) die Nebendreiecke desselben, ABC', ACB', BCA' und die Gegendreiecke dieser vier. Konstruirt man nun um den Mittelpunkt M des um ABC beschriebenen Kreises den Hauptkreis EFGE'F'G', so halbirt dieser nach §. 62. die Seiten BA', CA'; AB', CB'; AC', BC'. Daher sind die Bogen EF, GE', F'G' der Reihe nach den Winkeln A, B, C des Sehnendreieckes von ABC gleich.

§. 81.

Aufgabe. Die Neigung der Ebnen des Sehnendreieckes gegen die Ebnen der Seiten des sphärischen Dreieckes durch Formeln zu bestimmen.

Auflösung. Der Neigungswinkel des Sehnendreieckes gegen die Ebnen der Seite BC oder a (Fig. 37.) ist dem Komplemente des Perpendikels MD, das vom Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises auf a gefällt wird, gleich (g. S. §. 45.). Bezeichnet man also diesen Winkel mit v', so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreiecke MDB, in welchem $MD = \frac{1}{2}\pi - v'$; $BD = \frac{1}{2}a$; $BM = r$; $DBM = \frac{1}{2}(C+B-A)$; $BMD = A$ ist, folgende Gleichungen zwischen v' und je zwei der genannten Größen:

1) $\cot g \frac{1}{2} v' = \sin \frac{1}{2} a . \tan g \frac{1}{2}(C+B-A)$;

2) $\cot g \frac{1}{2} v' = \cos A . \tan g r$;

3) $\sin v' = \frac{\cos r}{\cos \frac{1}{2} a}$;

4) $\sin v' = \frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin\mathfrak{A}}$;

5) $\cos v' = \frac{\tang\frac{1}{2}a}{\tang\mathfrak{A}}$;

6) $\cos v' = \sin r \sin\frac{1}{2}(C+B-A)$;

Um v' durch die Seiten des Dreieckes auszudrücken, setze man in (1.) für $\tang\frac{1}{2}(C+B-A)$ den Werth

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{g}$$

so erhält man:

7) $\cotg v' = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{g}.(\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1)$;

$= \frac{\sin\frac{1}{2}a}{g}.(\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-\sin^2\frac{1}{2}a)$;

Oder setzt man in (6.) für $\sin r$ und $\sin\frac{1}{2}(C+B-A)$ resp. die Werthe: $\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{g}$ (§. 59.)

und $\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}$

so erhält man:

8) $\cos v' = \frac{\tang\frac{1}{2}a}{g}(\cos^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\sin^2\frac{1}{2}c-1)$.

Aus (7.) und (8.) folgt:

9) $\frac{\cos v'}{\cotg v'} = \sin$ [redacted] $= \frac{g}{\cos\frac{1}{2}a.g}$;

Zuſ. Sind v'', v''' die Neigungswinkel des Sehnendreieckes mit den Seiten b, c ſo iſt nach (3.):

$$\sin v'' = \frac{\cos r}{\cos\frac{1}{2}b};\quad \sin v''' = \frac{\cos r}{\cos\frac{1}{2}c};\quad \text{daher:}$$

$$\sin v' : \sin v'' : \sin v''' = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}a} : \frac{1}{\cos\frac{1}{2}b} : \frac{1}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Aus (6.) folgt eben ſo:

$$\cos v' : \cos v'' : \cos v''' = \sin\tfrac{1}{2}(B+C-A) : \sin\tfrac{1}{2}(A+C-B) : \sin\tfrac{1}{2}(A+B-C);$$

und aus (2.):

$$\tang v' : \tang v'' : \tang v''' = \cos\mathfrak{A} : \cos\mathfrak{B} : \cos\mathfrak{C}.$$

§. 82.

Aufgabe. Den Neigungswinkel der Ebnen zweier Polar-Sehnendreiecke zu berechnen.

Auflösung. Es sei (Fig. 38.) M der (sphär.) Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen und m der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises; so ist Mm das Supplement des gesuchten Neigungswinkels, insofern als solcher derjenige genommen wird, welcher zwischen den dem Mittelpunkte der Kugel zugekehrten (oder auch abgekehrten) Seiten der Kreisebnen enthalten ist (g. S. §. 46.).

Um Mm oder dessen Supplement zu bestimmen, fälle man von M und m auf BC die Perpendikel MD, md, welche über M und m verlängert in dem Pole P der Seite BC sich schneiden und von denen jenes die Seite BC in D halbirt, das andere aber im Berührungspunkte d des eingeschriebenen Kreises trifft. Es ist daher md der sphär. Halbmesser ϱ des eingeschriebenen Kreises; MD das Komplement des Neigungswinkels v' des Sehnendreieckes und der Ebne von BC. In dem Dreiecke PMm ist nun:

$$\cos Mm = \cos MPm \cdot \sin MP \cdot \sin mP + \cos MP \cdot \cos mP;$$

daher, wenn man für den Winkel MPm den gleichen Bogen Dd nimmt, v' für MP, $(\frac{1}{2}\pi - \varrho)$ für mP setzt und den gesuchten Neigungswinkel mit V bezeichnet,

$$-\cos V = \cos Dd \cdot \sin v' \cos\varrho + \cos v' \sin\varrho.$$

Da BC in D halbirt ist, so ist:

$$Dd = \tfrac{1}{2}BC - dC = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}(a+b-c); \quad (\text{§. 60.})$$
$$= \tfrac{1}{2}(c-b);$$

daher $-\cos V = \cos\frac{1}{2}(c-b)\sin v' \cos\varrho + \cos v' \sin\varrho;$ (1.)

Nach vorigem §. ist $\sin v' = \dfrac{\cos r}{\cos\frac{1}{2}a}$; und

$$\cos v' = \sin r \sin\tfrac{1}{2}(C+B-A);$$
$$= \sin r \frac{(\sin^2\frac{1}{2}c + \sin^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}a - 1)}{2\sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}a};$$

Dies in (1.) eingesetzt giebt:

1) $\frac{dC}{dA} = -\cos b$; $\frac{dC}{dB} = -\cos a$;

$\frac{dC}{dc} = \sin a \sin B = \sin b \sin A$;

2) $\frac{da}{dA} = \frac{\sin b}{\sin C}$; $\frac{da}{dB} = \sin a \operatorname{cotg} C$;

$\frac{da}{dc} = \frac{\cos b \sin A}{\sin C}$;

3) $\frac{db}{dA} = \sin b \operatorname{cotg} C$; $\frac{db}{dB} = \frac{\sin a}{\sin C}$;

$\frac{db}{dc} = \frac{\cos a \sin B}{\sin C}$;

VI) Unabhängig A, B, a.

Man findet db, dc, dC aus 4, 8, 13.

1) $\frac{db}{da} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$; $\frac{db}{dB} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} B}$;

$\frac{db}{dA} = -\frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} A}$;

2) $\frac{dc}{da} = \frac{\sin C}{\cos b \sin A}$; $\frac{dc}{dA} = -\frac{\operatorname{tang} b}{\sin A}$;

$\frac{dc}{dB} = -\frac{\sin c \operatorname{cotg} C}{\cos b}$;

3) $\frac{dC}{da} = \operatorname{tang} b \sin C$; $\frac{dC}{dA} = -\frac{1}{\cos b}$;

$\frac{dC}{dB} = -\frac{\cos c}{\cos b}$;

Wie von den hier aufgeführten Differenzialkoeffizienten, wenn unter den als unabhängig veränderlich angenommenen Stücken eins oder zwei unveränderlich sind, die von denselben herrührenden Koeffizienten wegfallen oder Null werden, ist als bekannt vorauszusetzen.

§. 82.

Aufgabe. Den Neigungswinkel der Ebnen zweier Polar-Sehnendreiecke zu berechnen.

Auflösung. Es sei (Fig. 38.) M der (sphär.) Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen und m der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises; so ist Mm das Supplement des gesuchten Neigungswinkels, insofern als solcher derjenige genommen wird, welcher zwischen den dem Mittelpunkte der Kugel zugekehrten (oder auch abgekehrten) Seiten der Kreisebnen enthalten ist (g. S. §. 46.).

Um Mm oder dessen Supplement zu bestimmen, fälle man von M und m auf BC die Perpendikel MD, md, welche über M und m verlängert in dem Pole P der Seite BC sich schneiden und von denen jenes die Seite BC in D halbirt, das andere aber im Berührungspunkte d des eingeschriebenen Kreises trifft. Es ist daher md der sphär. Halbmesser ϱ des eingeschriebenen Kreises; MD das Komplement des Neigungswinkels v' des Sehnendreieckes und der Ebne von BC. In dem Dreiecke PMm ist nun:

$$\cos Mm = \cos MPm \cdot \sin MP \cdot \sin mP + \cos MP \cdot \cos mP;$$

daher, wenn man für den Winkel MPm den gleichen Bogen Dd nimmt, v' für MP, $(\frac{1}{2}\pi - \varrho)$ für mP setzt und den gesuchten Neigungswinkel mit V bezeichnet,

$$-\cos V = \cos Dd \cdot \sin v' \cos\varrho + \cos v' \sin\varrho.$$

Da BC in D halbirt ist, so ist:

$$Dd = \tfrac{1}{2}BC - dC = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}(a+b-c); \text{ (§. 60.)}$$
$$= \tfrac{1}{2}(c-b);$$

daher $-\cos V = \cos\frac{1}{2}(c-b)\sin v' \cos\varrho + \cos v' \sin\varrho$; (1.)

Nach vorigem §. ist $\sin v' = \dfrac{\cos r}{\cos\frac{1}{2}a}$; und

$$\cos v' = \sin r \sin\tfrac{1}{2}(C+B-A);$$
$$= \sin r \frac{(\sin^2\frac{1}{2}c + \sin^2\frac{1}{2}b + \cos^2\frac{1}{2}a - 1)}{2\sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}a)};$$

Dies in (1.) eingesetzt giebt:

$$-\cos V = \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\cos r\cos\varrho}{\cos\frac{1}{2}a} + \frac{(\sin^2\frac{1}{2}c+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}a-1)}{2\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a}\sin r\sin\varrho;$$

Ferner iſt: $\cos r\cos\varrho = \frac{\sin r\sin\varrho}{\operatorname{tang} r\operatorname{tang}\varrho}$

$$= \frac{\sin r\sin\varrho\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c};\quad (\S.\ 60.)$$

daher $$-\cos V = \left(\frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}{\sin\frac{1}{2}a} + \sin^2\tfrac{1}{2}c+\sin^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}a-1\right)\frac{\sin r\sin\varrho}{2\sin\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a};$$

$$= \left\{\cos\tfrac{1}{2}(c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) + \sin\tfrac{1}{2}a(\sin^2\tfrac{1}{2}c+\sin^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}a-1)\right\}\frac{\sin r.\sin\varrho}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a};$$

$$= \left\{\cos\tfrac{1}{2}(c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c) + \sin\tfrac{1}{2}a(\cos^2\tfrac{1}{2}a-\cos\tfrac{1}{2}(c-b)\cos\tfrac{1}{2}(c+b))\right\}\frac{\sin r\sin\varrho}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a};$$

$$= \frac{\{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)-\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(c+b)\}\cos\frac{1}{2}(c-b)+\sin\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a}.\sin r\sin\varrho;$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b)\cos\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a}.\sin r\sin\varrho;$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(c+b)+\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.\sin r\sin\varrho;$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sin c+\sin b)+\frac{1}{2}\sin a}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.\sin r\sin\varrho;$$

$$= \frac{\sin a+\sin b+\sin c}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.\sin r\sin\varrho;\quad (2.)$$

Aus $\operatorname{tang} r\operatorname{tang}\varrho = \frac{2\sin^2 a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}$

erhält man:

$$\frac{\sin r\sin\varrho}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c} = \frac{\cos r\cos\varrho}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)};$$

Dies in (2.) ſubſtituirt giebt:

$$-\cos V = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{2 \sin \frac{1}{2}(a+b+c)} \cdot \cos r \cos \varrho ; \quad (3.)$$

Verwechſelt man das Dreieck ABC mit ſeinem Polardreiecke, was in Rückſicht auf V gleichgültig iſt; ſo erhält man, indem für r, ϱ deren Komplemente eintreten:

$$-\cos V = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C} \cdot \cos r \cos \varrho ; \quad (4.)$$

$$-\cos V = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{-2 \cos \frac{1}{2}(A+B+C)} \cdot \sin r \sin \varrho ; \quad (5.)$$

$$= \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2 \sin \frac{1}{2} T} \cdot \sin r \sin \varrho .$$

Um V unabhängig von r und ϱ auszudrücken, können die für sin r, cos r, sin ϱ, cos ϱ aus §. 59. und §. 60. bekannten Werthe in obigen Formeln eingeſetzt werden. Aus (2.) erhält man dann:

$$-\cos V = \frac{\sin a + \sin b + \sin c}{2 g} \cdot \frac{G}{\mathfrak{G}} ; \quad (6.)$$

aus (4.) $$-\cos V = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2 \mathfrak{G}} \cdot \frac{g}{g} ; \quad (7.)$$

Anhang I.

A. Differenzialformeln für sphärische Dreiecke.

§. 83.

Da zur Bestimmung eines sphärischen Dreieckes drei Stücke erforderlich sind, so ist jeder Winkel und jede Seite desselben eine Funktion dreier von einander unabhängiger Größen und es läßt sich daher die Veränderung, welche jene erleiden, wenn diese vergrößert oder verkleinert werden, nach demselben Gesetze bestimmen, nach welchem die Differenz einer von mehreren veränderlichen Größen abhängigen Funktion durch die Differenzen der letzteren ausgedrückt wird. Die Aufsuchung der Verhältnisse, in welchen diese abhängigen und unabhängigen Veränderungen in sphärischen Dreiecken zu einander stehen und die Bestimmung des Einflusses der Lage und der Größe dabei ist nicht nur an sich von Interesse, sondern auch bei Anwendungen der sphär. Trigonometrie auf astronomische und geodätische Messungen — zur Beurtheilung der Schärfe der durch Messung und Rechnung erhaltenen Resultate, zur Korrektion von Fehlern, zur Bestimmung derjenigen Stücke und Lagen, welche bei der Messung die geringsten Fehler veranlassen, zur Interpolation u. s. w. — wichtig und nothwendig.

Bekanntlich läßt sich die Differenz ΔA, um welche eine von den veränderlichen Größen a, b, c abhängige Funktion A

wächſt, wenn dieſe reſp. um die Differenzen Δa, Δb, Δc, zunehmen, nach Potenzen dieſer Differenzen ſo ausdrücken:

$$\Delta A = \frac{dA}{da}.\Delta a + \frac{dA}{db}.\Delta b + \frac{dA}{dc}.\Delta c + \frac{d^2A}{da^2}.\frac{\Delta a^2}{1.2} + \frac{d^2A}{da.db}.\Delta a.\Delta b + \ldots\ldots$$

Nach dieſer Reihe läßt ſich z. B. aus der Gleichung $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$ die Differenz des Winkels A durch die Differenzen der Seiten a, b, c ausdrücken, da zur Beſtimmung der Koeffizienten der Differenzenreihe nur ein wiederholtes Differenziiren jener Gleichung nöthig iſt. Wollte man indeß auch nur die Glieder der drei erſten Grade dieſer Reihe vollſtändig entwickeln, ſo würden die Formeln ſchon weitläufig werden und, die Differenzen jedes Winkels und jeder Seite aus den Differenzen je dreier Stücke zu finden, würde eine bedeutende Menge ſolcher Formeln nöthig machen. Selten aber möchte von denſelben ein vortheilhafter Gebrauch zu machen ſein. Deſto häufiger aber werden die Glieder des erſten Grades mit Nutzen gebraucht. Wir beſchränken uns daher hier auf die Beſtimmung der Differenzialkoeffizienten des erſten Grades um ſo mehr, als eine weitere Anwendung der Differenzialrechnung auf die ſphäriſche Geometrie nicht hieher gehört.

§. 84.

Aufgabe. Aus den Differenzialen je dreier Stücke eines ſphäriſchen Dreieckes das Differenzial jedes der übrigen Stücke zu finden.

Auflöſung. Um von den Differenzialen der Seiten und Winkel:

$$da, db, dc, dA, dB, dC$$

jedes durch drei der übrigen auszudrücken, werden Gleichungen zwiſchen je vier dieſer Elemente erfordert und zwar 15 Gleichungen, da 15 Verbindungen zu vieren aus den ge-

$$= \frac{\sin B \cot g B}{\sin A} = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Dieſe Werthe für die Koeffizienten zu db und dC ſubſtituirt:

$$-\frac{\sin b}{\sin^2 a}.da + \frac{\cos c}{\sin a}.db + \frac{\sin C}{\sin^2 A}.dA + \frac{\cos B}{\sin A}.dC = 0;$$

oder, um gleiche Nenner zu erhalten:

$$-\frac{\sin B}{\sin a \sin A}.da + \frac{\cos c \sin A}{\sin a \sin A}.db + \frac{\sin c}{\sin a \sin A}.dA + \frac{\sin a \cos B}{\sin a \sin A}.dC = 0;$$

daher endlich die dritte Haupt-Differenzialgleichung:

$$-\sin B.da + \cos c \sin A.db + \sin c.dA + \sin a \cos B.dC = 0;$$

Einfacher ergiebt ſich dieſe Gleichung aus (I.) durch Elimination. Denn für die Quaternionen da, db, dc, dA und da, db, dc, dC hat man dort die Gleichungen:

$$-da + \cos C.db + \cos B.dc + \sin b \sin C.dA = 0; \quad (\alpha)$$
$$-dc + \cos A.db + \cos B.da + \sin b \sin A.dC = 0; \quad (\beta)$$

Setzt man den aus (β) für dc ſich ergebenden Werth in (α) ein, ſo erhält man geordnet:

$$-(1-\cos^2 B)da + (\cos C + \cos A \cos B)db + \sin c \sin B.dA + \sin a \sin B \cos B.dC = 0;$$

Nun iſt: $\cos C + \cos A \cos B = \cos c \sin A \sin B$; (§. 15.) alſo:

$$-\sin^2 B.da + \cos c \sin A \sin B.db + \sin c \sin B.dA + \sin a \sin B \cos B.dC = 0;$$

woraus nach Diviſion mit sin B die obige Gleichung folgt.

IV) Die Gleichung von (I.) auf das Neben-Polardreieck $\left\{\begin{matrix} a & b & \bar{c} \\ A & B & \bar{C} \\ a & b & \bar{c} \end{matrix}\right\}$ bezogen giebt:

$$-dA + \cos \bar{c}.dB + \cos b.d\bar{C} + \sin B \sin \bar{c}.da = 0;$$

d. i. $-dA - \cos c.dB - \cos b.dC + \sin B \sin c.da = 0;$

oder $dA + \cos c.dB + \cos b.dC - \sin B \sin c.da = 0;$

$$\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A = \sin a \cos C;$$
$$\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A = \sin a \cos B;$$

Man erhält alſo:

$$-\sin a \,.\, da + \sin a \cos C \,.\, db + \sin a \cos B \,.\, dc + \sin b \sin c \sin A \,.\, dA = 0;$$

Dividirt man hier alles mit $\sin a$ und ſetzt $\frac{\sin C}{\sin c}$ für $\frac{\sin A}{\sin a}$, ſo ergiebt ſich die Fundamentalgleichung:

$$-da + \cos C \,.\, db + \cos B \,.\, dc + \sin b \sin C \,.\, dA = 0;$$

II) Für die Quaternion a, b, A, B iſt die Gleichung:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B};$$

Nimmt man, um bequemer zu differenziiren, Logarithmen, ſo iſt:

$$\log \sin a - \log \sin b = \log \sin A - \log \sin B;$$

und man erhält ſogleich:

$$\cot g a \,.\, da - \cot g b \,.\, db = \cot g A \,.\, dA - \cot g B \,.\, dB;$$

III) Die Gleichung für a, b, A, C iſt:

$$\cot g a \sin b - \cot g A \sin C - \cos b \cos C = 0;$$

Durch Differenziirung erhält man:

$$-\frac{\sin b}{\sin^2 a} \,.\, da + \cot g a \cos b \,.\, db + \frac{\sin C}{\sin^2 A} \,.\, dA - \cot g A \cos C \,.\, dC + \sin b \cos C \,.\, db + \cos b \sin C \,.\, dC = 0;$$

geordnet:

$$-\frac{\sin b}{\sin^2 a} \,.\, da + (\cot g a \cos b + \sin b \cos C)\, db + \frac{\sin C}{\sin^2 A} \,.\, dA + (\cos b \sin C - \cot g A \cos C)\, dC = 0;$$

Nach §. 25., C.5, iſt nun:

$$\cot g a \cos b + \sin b \cos C = \frac{\sin C \cot g c}{\sin A} = \frac{\sin c \,.\, \cot g c}{\sin a} = \frac{\cos c}{\sin a};$$

und nach §. 25., D.3 iſt:

$$\cos b \sin C - \cot g A \cos C = \frac{\sin b \cot g B}{\sin a}$$

$$= \frac{\sin B \operatorname{cotg} B}{\sin A} = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Dieſe Werthe für die Koeffizienten zu db und dC ſubſtituirt:

$$-\frac{\sin b}{\sin^2 a}.da + \frac{\cos c}{\sin a}.db + \frac{\sin C}{\sin^2 A}.dA + \frac{\cos B}{\sin A}.dC = 0;$$

oder, um gleiche Nenner zu erhalten:

$$-\frac{\sin B}{\sin a \sin A}.da + \frac{\cos c \sin A}{\sin a \sin A}.db + \frac{\sin c}{\sin a \sin A}.dA + \frac{\sin a \cos B}{\sin a \sin A}.dC = 0;$$

daher endlich die dritte Haupt-Differenzialgleichung:

$$-\sin B.da + \cos c \sin A.db + \sin c.dA + \sin a \cos B.dC = 0;$$

Einfacher ergiebt ſich dieſe Gleichung aus (I.) durch Elimination. Denn für die Quaternionen da, db, dc, dA und da, db, dc, dC hat man dort die Gleichungen:

$$-da + \cos C.db + \cos B.dc + \sin b \sin C.dA = 0; \quad (\alpha)$$

$$-dc + \cos A.db + \cos B.da + \sin b \sin A.dC = 0; \quad (\beta)$$

Setzt man den aus (β) für dc ſich ergebenden Werth in (α) ein, ſo erhält man geordnet:

$$-(1-\cos^2 B)da + (\cos C + \cos A \cos B)db + \sin c \sin B.dA + \sin a \sin B \cos B.dC = 0;$$

Nun iſt: $\cos C + \cos A \cos B = \cos c \sin A \sin B$; (§. 15.) alſo:

$$-\sin^2 B.da + \cos c \sin A \sin B.db + \sin c \sin B.dA + \sin a \sin B \cos B.dC = 0;$$

woraus nach Diviſion mit $\sin B$ die obige Gleichung folgt.

IV) Die Gleichung von (I.) auf das Neben-Polardreieck $\left\{\begin{matrix} a & b & \bar{c} \\ A & B & \bar{C} \\ a & b & \bar{c} \end{matrix}\right\}$ bezogen giebt:

$$-dA + \cos \bar{c}.dB + \cos b.d\bar{C} + \sin B \sin \bar{c}.da = 0;$$

d. i. $-dA - \cos c.dB - \cos b.dC + \sin B \sin c.da = 0;$

oder $dA + \cos c.dB + \cos b.dC - \sin B \sin c.da = 0;$

n vier Hauptgleichungen erhält man durch Ver-
mung ...: die aus den Elementen da, db, dc, dA,
lichen 15 Quaternionen folgende 15 Gleichun-
gen zur ... ung obiger Aufgabe:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ -da+\cos C.db+\cos B.dc+\sin b\sin C.dA=0;\\ 2)\ -db+\cos C.da+\cos A.dc+\sin a\sin C.dB=0;\\ 3)\ -dc+\cos B.da+\cos A.db+\sin a\sin B.dC=0; \end{array}\right\}\ (I.)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4)\ \mathrm{cotg}\,a.da-\mathrm{cotg}\,b.db=\mathrm{cotg}A.dA-\mathrm{cotg}B.dB;\\ 5)\ \mathrm{cotg}\,a.da-\mathrm{cotg}\,c.dc=\mathrm{cotg}A.dA-\mathrm{cotg}C.dC;\\ 6)\ \mathrm{cotg}\,b.db-\mathrm{cotg}\,c.dc=\mathrm{cotg}B.dB-\mathrm{cotg}C.dC; \end{array}\right\}\ (II.)$$

$$\left.\begin{array}{l} 7)\ -\sin B.da+\cos c\sin A.db+\sin c.dA\\ \qquad\qquad +\sin a\cos B.dC=0;\\ 8)\ -\sin C.da+\cos b\sin A.dc+\sin b.dA\\ \qquad\qquad +\sin a\cos C.dB=0;\\ 9)\ -\sin A.db+\cos c\sin B.da+\sin c.dB\\ \qquad\qquad +\sin b\cos A.dC=0;\\ 10)\ -\sin C.db+\cos a\sin B.dc+\sin a.dB\\ \qquad\qquad +\sin b\cos C.dA=0;\\ 11)\ -\sin A.dc+\cos b\sin C.da+\sin b.dC\\ \qquad\qquad +\sin c\cos A.dB=0;\\ 12)\ -\sin B.dc+\cos a\sin C.db+\sin a.dC\\ \qquad\qquad +\sin c\cos B.dA=0; \end{array}\right\}\ (III.)$$

$$\left.\begin{array}{l} 13)\ dA+\cos c.dB+\cos b.dC-\sin b\sin C.da=0;\\ 14)\ dB+\cos c.dA+\cos a.dC-\sin a\sin C.db=0;\\ 15)\ dC+\cos b.dA+\cos a.dB-\sin a\sin B.dc=0; \end{array}\right\}\ (IV.)$$

§. 85.

Diejenigen drei Stücke des Dreieckes, von welchen als unabhängig veränderlichen die übrigen als Funktionen betrachtet werden, können sein:

1) drei Seiten; 2) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel; 3) zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel; 4) drei Winkel; 5) zwei Winkel und die anliegende Seite; 6) zwei Winkel und eine der gegenüber liegenden Seiten.

Hiernach lassen sich nun die Differenzialkoeffizienten für die abhängigen Stücke aus obigen Gleichungen so zusammen stellen:

I) Unabhängig a, b, c.

Man findet dA, dB, dC resp. aus No. 1, 2, 3 und zwar:

1) $\frac{dA}{da} = \frac{1}{\sin b \sin C} = \frac{1}{\sin c \sin B}$;

$\frac{dA}{db} = \frac{-\cos C}{\sin b \sin C} = \frac{-\operatorname{cotg} C}{\sin b}$;

$\frac{dA}{dc} = \frac{-\cos B}{\sin b \sin C} = \frac{-\operatorname{cotg} B}{\sin c}$;

Hieraus durch Verwechselung:

2) $\frac{dB}{da} = \frac{-\operatorname{cotg} C}{\sin a}$;

$\frac{dB}{db} = \frac{1}{\sin a \sin C} = \frac{1}{\sin c \sin A}$;

$\frac{dB}{dc} = \frac{-\operatorname{cotg} A}{\sin c}$;

3) $\frac{dC}{da} = \frac{-\operatorname{cotg} B}{\sin a}$; $\frac{dC}{db} = \frac{-\operatorname{cotg} A}{\sin b}$;

$\frac{dC}{dc} = \frac{1}{\sin b \sin A} = \frac{1}{\sin a \sin B}$;

II) Unabhängig a, b, C.

Es findet sich dc, dA, dB aus No. 3, 7, 9.

1) $\frac{dc}{da} = \cos B$; $\frac{dc}{db} = \cos A$;

$\frac{dc}{dC} = \sin a \sin B = \sin b \sin A$;

2) $\frac{dA}{da} = \frac{\sin B}{\sin c}$; $\frac{dA}{db} = -\operatorname{cotg} c \sin A$;

$\frac{dA}{dC} = \frac{-\sin a \cos B}{\sin c}$;

3) $\frac{dB}{da} = -\operatorname{cotg} c \sin B$; $\frac{dB}{db} = \frac{\sin A}{\sin c}$;

$$\frac{dB}{dC} = \frac{\sin b \cos A}{\sin c};$$

III) Unabhängig a, b, A.

Man erhält dc, dB, dC aus 1, 4, 7.

1) $\frac{dc}{da} = \frac{1}{\cos B}; \quad \frac{dc}{db} = -\frac{\cos C}{\cos B};$

$$\frac{dc}{dA} = \frac{-\sin b \sin C}{\cos B} = -\sin c \operatorname{tang} B;$$

2) $\frac{dB}{da} = \frac{-\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} a}; \quad \frac{dB}{db} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} b};$

$$\frac{dB}{dA} = \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} A};$$

3) $\frac{dC}{da} = \frac{\operatorname{tang} B}{\sin a};$

$$\frac{dC}{db} = \frac{-\cos c \operatorname{tang} B}{\sin b} = \frac{-\operatorname{cotg} c \sin C}{\cos B};$$

$$\frac{dC}{dA} = -\frac{\sin c}{\sin a \cos B};$$

IV) Unabhängig A, B, C.

Es ergiebt sich da, db, dc aus 13, 14, 15.

1) $\frac{da}{dA} = \frac{1}{\sin b \sin C} = \frac{1}{\sin c \sin B};$

$$\frac{da}{dB} = \frac{\operatorname{cotg} c}{\sin B}; \quad \frac{da}{dC} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\sin C};$$

2) $\frac{db}{dA} = \frac{\operatorname{cotg} c}{\sin A}; \quad \frac{db}{dB} = \frac{1}{\sin a \sin C} = \frac{1}{\sin c \sin A};$

$$\frac{db}{dC} = \frac{\operatorname{cotg} a}{\sin C};$$

3) $\frac{dc}{dA} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\sin A}; \quad \frac{dc}{dB} = \frac{\operatorname{cotg} a}{\sin B};$

$$\frac{dc}{dC} = \frac{1}{\sin a \sin B} = \frac{1}{\sin b \sin A};$$

V) Unabhängig A, B, c.

Man erhält dC, da, db aus 15, 8, 10.

andern genommen werden und man hat mit derselben Genauigkeit wie oben:

$$A = A' + \tfrac{1}{3}\tau;$$

Eben so erhält man $B = B' + \tfrac{1}{3}\tau$; $C = C' + \tfrac{1}{3}\tau$. Daraus ergiebt sich der merkwürdige Satz:

Wenn die Seiten eines sphärischen Dreieckes sehr klein sind im Verhältniß zum Kugelradius, so ist jeder Winkel desselben um den dritten Theil des Flächeninhaltes des sphärischen Dreieckes größer als der entsprechende Winkel desjenigen ebnen Dreieckes, das mit dem sphärischen gleiche Seiten hat.

Es kann also die Auflösung eines sphär. Dreieckes auf die eines ebnen zurückgeführt werden, wenn man für jenes ein ebnes substituirt, dessen Seiten den des sphärischen Dreieckes gleich, dessen Winkel aber um $\frac{1}{3}$ des Flächeninhaltes des sphärischen oder des ebnen Dreieckes kleiner, als die Winkel in jenem, sind.

§. 90.

Um den in Theilen des Kugelradius genommenen Flächenraum oder Winkelüberschuß τ in Sekunden auszudrücken, multiplizirt man τ mit der Zahl der Sekunden, die auf den Kugelradius kommen. Bezeichnet man diese Zahl mit r, die Zahl der in τ enthaltenen Sekunden mit s, so ist:

$$\tau = \frac{s}{r}; \text{ daher } s = r\tau;$$

Sind die Seiten des sphärischen Dreieckes nach einer andern Lineareinheit (z. B. Ruthe) gemessen, die im Kugelradius R mal enthalten ist, und ist S der nach dieser Einheit gemessene Flächenraum des Dreieckes, so ist:

$$S = R^2\tau = \frac{R^2 s}{r};$$

daher ..... $$s = \frac{S.r}{R^2}$$

B. Reihen zur Auflösung sphärischer Dreiecke.

§. 86.

Die in §. 37. unter Num. 33—40 angeführten Gleichungen lassen sich mit geringer Umwandlung auf die Form der Gleichung:

$$\operatorname{tang} y = \frac{n \sin x}{1 \pm n \cos x}$$

bringen, aus welcher y nach §. 7. durch eine nach den Sinus der vielfachen von x fortschreitenden Reihe ausgedrückt werden kann. Die Gleichungen Num. 33—36 geben nämlich:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \sin C}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \cos C}; \quad (1.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(-A-B+C+\pi) = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b \sin C}{1+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b \cos C}; \quad (2.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B-C+\pi) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b \sin C}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}a \operatorname{cotg}\frac{1}{2}b \cos C}; \quad (3.)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(-A+B-C+\pi) = \frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \sin C}{1-\operatorname{cotg}\frac{1}{2}a \operatorname{tang}\frac{1}{2}b \cos C}; \quad (4.)$$

Aus (1.) erhält man nach §. 7. II.

$$\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b \sin C - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}b \sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}b \sin 3C - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}b \sin 4C + \ldots \quad (5.)$$

ein merkwürdiger Ausdruck für den **Flächenraum** des sphärischen Dreieckes.

Aus (2.) erhält man:

$$\tfrac{1}{2}(-A-B+C+\pi) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b \sin C - \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b \sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b \sin 3C - \ldots\ldots \quad (6.)$$

und aus (3), (4.) nach §. 7. I.

$$\tfrac{1}{2}(A-B-C+\pi) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b \sin C + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b \sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b \sin 3C + \ldots\ldots \quad (7.)$$

$$\tfrac{1}{2}(-A+B-C+\pi) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b \sin C + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}b \sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}a \operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}b \sin 3C + \ldots\ldots \quad (8.)$$

Damit die Reihe (5.) konvergire, muß:

$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \cdot \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b < 1$; oder

$\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b < \cos\tfrac{1}{2}a \cdot \cos\tfrac{1}{2}b$; also

$\cos\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b - \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b > 0$; d. i.

$\cos\tfrac{1}{2}(a+b) > 0$;

also $\tfrac{1}{2}(a+b) < \tfrac{1}{2}\pi$ oder $a+b<\pi$ sein. Die Reihe konvergirt sehr schnell, wenn a, b sehr klein sind. Die Reihe (6.) konvergirt, wenn $(a+b)>\pi$ ist. Die Konvergenz der Reihe (7.) bedingt, daß:

$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b < 1$; oder

$\sin\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b < \cos\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b$; oder

$\cos\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b - \sin\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}b > 0$; d. i.

$\sin\tfrac{1}{2}(b-a) > 0$

also daß $b>a$ sei.

In der Reihe (8.) muß umgekehrt $a>b$ sein, wenn sie konvergiren soll.

Zugleich können also die Reihen (5.) und (6.), so wie (7.) und (8.) nicht konvergiren; wohl aber (5.) und (7.), oder (5.) und (8.); so wie (6.) und (7.) oder (6.) und (8.). In jedem Falle werden demnach zwei konvergirende Reihen vorhanden sein, aus denen die Winkel A und B gefunden werden können.

I) Ist $a+b<\pi$ und $a<b$; so erhält man aus (5.) und (7.) durch Addition:

$$A = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b)\sin C + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b)\sin 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b + \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}b)\sin 3C + \ldots. \quad (9.)$$

durch Subtraktion:

$$B = \pi - C - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b)\sin C - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b + \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b)\sin 2C - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}b - \operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}b)\sin 3C - \ldots. \quad (10.)$$

Iſt aber $a > b$; ſo verwechſelt man in (9.) und (10.) a, A mit b, B.

II) Iſt $a + b > \pi$ und $a < b$, ſo ergiebt ſich aus (6.) und (7.) durch Addition:

$$\pi - B = \cot g \tfrac{1}{2} b (\tan g \tfrac{1}{2} a + \cot g \tfrac{1}{2} a) \sin C + \tfrac{1}{2} \cot g^2 \tfrac{1}{2} b (\tan g^2 \tfrac{1}{2} a - \cot g^2 \tfrac{1}{2} a) \sin 2C + \tfrac{1}{3} \cot g^3 \tfrac{1}{2} b (\tan g^3 \tfrac{1}{2} a + \cot g^3 \tfrac{1}{2} b) \sin 3C + \ldots . \quad (11.)$$

durch Subtraktion:

$$A = C + \cot g \tfrac{1}{2} b (\tan g \tfrac{1}{2} a - \cot g \tfrac{1}{2} a) \sin C + \tfrac{1}{2} \cot g^2 \tfrac{1}{2} b (\tan g^2 \tfrac{1}{2} a + \cot g^2 \tfrac{1}{2} a) \sin 2C + \tfrac{1}{3} \cot g^3 \tfrac{1}{2} b (\tan g^3 \tfrac{1}{2} - \cot g^3 \tfrac{1}{2} a) \sin 3C + \ldots . \quad (12.)$$

§. 87.

Für die dritte Seite c kann eine ähnliche Reihe aufgeſtellt werden, die ſich allgemein auf folgende Weiſe entwickeln läßt.

Wenn zwiſchen y und x die Gleichung:

$$y^2 = 1 + 2n \cos x + n^2 \quad (\alpha)$$

ſtatt findet, ſo iſt:

$$\log y = n \cos x - \tfrac{1}{2} n^2 \cos 2x + \tfrac{1}{3} n^3 \cos 3x - \ldots .$$

Denn ſetzt man in (α) für $\cos x$ den exponentiellen Ausdruck:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \quad (\S.\ 6,\ VI.)$$

ſo erhält man:

$$y^2 = 1 + n(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}) + n^2;$$
$$= 1 + n(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}) + ne^{x\sqrt{-1}} . ne^{-x\sqrt{-1}};$$
$$= (1 + ne^{x\sqrt{-1}})(1 + ne^{-x\sqrt{-1}});$$

Daher iſt:

$$2 \log y = \log(1 + ne^{x\sqrt{-1}}) + \log(1 + ne^{-x\sqrt{-1}});$$
$$= ne^{x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2} n^2 e^{2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3} n^3 e^{3x\sqrt{-1}} - \ldots .$$
$$+ ne^{-x\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2} n^2 e^{-2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3} n^3 e^{-3x\sqrt{-1}} - \ldots .$$

daher, wenn die Glieder beider Reihen nach Potenzen von n zuſammengezogen und mit 2 dividirt werden:

$$\log y = n.\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} - \tfrac{1}{2}n^2.\frac{e^{2x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}}}{2}$$
$$+ \tfrac{1}{3}n^3.\frac{e^{3x\sqrt{-1}} + e^{-3x\sqrt{-1}}}{2} - \ldots.$$
$$= n\cos x - \tfrac{1}{2}n^2\cos 2x + \tfrac{1}{3}n^3\cos 3x - \ldots.$$

Für negative Werthe von n wird also aus der Gleichung:

$$y^2 = 1 - 2n\cos x + n^2 \quad (\beta)$$

die Reihe folgen:

$$\log y = -n\cos x - \tfrac{1}{2}n^2\cos 2x - \tfrac{1}{3}n^3\cos 3x - \ldots.$$

Auf die Form der Gleichungen (α) und (β) läßt sich nun die Gleichung:

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C; \quad (\gamma)$$

bringen, wenn man beide Theile von 1 subtrahirt oder dazu addirt. Letzteres giebt:

$$1 + \cos c = 1 + \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C; \text{ oder}$$
$$2\cos^2\tfrac{1}{2}c = 2\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b + 2\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b + \sin a\sin b\cos C;$$

Jenachdem man auf beiden Seiten mit $2\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b$, oder mit $2\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b$ dividirt, erhält man unter der Form der Gleichung (α):

$$\frac{\cos^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b} = 1 + 2\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C + \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}b; \quad (13.)$$

oder $$\frac{\cos^2\frac{1}{2}c}{\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b} = 1 + 2\cot\mathrm{g}\tfrac{1}{2}a\cot\mathrm{g}\tfrac{1}{2}b\cos C + \mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}b; \quad (14.)$$

Durch Subtraktion erhält man aus (γ):

$$1 - \cos c = 1 - \cos a\cos b - \sin a\sin b\cos C; \text{ oder}$$
$$2\sin^2\tfrac{1}{2}c = 2\sin^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b + 2\cos^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b - \sin a\sin b\cos C;$$

und hieraus, wenn man mit $2\cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b$, oder mit $2\sin^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b$ dividirt, die Gleichungen:

$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b} = 1 - 2\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}\tfrac{1}{2}b\cos C + \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}b; \quad (15.)$$

$$\frac{}{\sin^2\frac{1}{2}a\cos\frac{}{\frac{1}{2}b} = 1 - 2\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C + \operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b;} \quad (16.)$$

die beide von der Form der Gleichung (β) sind.

Durch Anwendung der für (α) und (β) gefundenen Reihen auf vorstehende Gleichungen ergiebt sich nun aus No. 13.

$$\log\left(\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}\right) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots.$$

daher:

$$\log\cos\tfrac{1}{2}c = \log(\cos\tfrac{1}{2}a\,.\cos\tfrac{1}{2}b) + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots \quad (17.)$$

Aus No. 14, 15, 16.

$$\log\cos\tfrac{1}{2}c = \log(\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b) + \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C + \tfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\tfrac{1}{2}a\operatorname{ctg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots \quad (18.)$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}c = \log(\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b) - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C - \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}a\operatorname{ctg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots \quad (19.)$$

$$\log\sin\tfrac{1}{2}c = \log(\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b) - \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\cos C - \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b\cos 2C - \tfrac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}b\cos 3C - \ldots \quad (20.)$$

Man wird leicht bemerken, daß die letzten drei Reihen aus der ersten (17.), durch Anwendung derselben auf die Nebendreiecke $(\alpha\beta\bar{\gamma})$, $(\alpha\bar{\beta}\gamma)$, $(\bar{\alpha}\beta\gamma)$, folgen. Die Reihe in (17.) ist konvergent, wenn $a + b < \pi$ ist; die folgende, wenn $a+b > \pi$; die Reihe (19.), wenn $a < b$; und (20.), wenn $a > b$ ist.

Subtrahirt man (19.) von (17.), so findet sich:

$$\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c = \log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b)\cos C + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a(\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b - \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}b)\cos 2C + \ldots \quad (21.)$$

Subtrahirt man (19.) von (18.), so erhält man:

$$\log\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}c = \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}b(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}a)\cos C + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}b(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a - \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}a)\cos 2C + \ldots \quad (22.)$$

Ist $a+b<\pi$ und $a<b$; so konvergirt (21.); ist $a+b>\pi$ und $a<b$; so ist (22.) konvergent. In beiden Reihen ist a und b zu vertauschen, wenn $a>b$ ist, damit die Reihen konvergiren.

§. 88.

Wie durch die hier entwickelten Reihen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die übrigen Stücke des Dreieckes gefunden werden; so lassen sie sich auch für den Fall, wenn eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben sind, anwenden. Denn bezieht man dieselben auf das Neben-Polardreieck $\begin{Bmatrix} a\ b\ \overline{c} \\ A\ B\ \overline{C} \\ \overline{a}\ \overline{b}\ c \end{Bmatrix}$, so erhält man sogleich aus (5)—(8).

$$\pi-\tfrac{1}{2}(a+b+c)=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B\sin c$$
$$+\tfrac{1}{2}\operatorname{cot}^2\tfrac{1}{2}A\operatorname{cot}^2\tfrac{1}{2}B\sin 2c+\tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}A\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B\sin 3c\ldots. \quad (23.)$$
$$\tfrac{1}{2}(a+b-c)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B\sin c+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B\sin 2c$$
$$+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}B\sin 3c+\ldots. \quad (24.)$$
$$\tfrac{1}{2}(a-b+c)=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B\sin c-\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A\operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}B\sin 2c$$
$$+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B\sin 3c+\ldots. \quad (25.)$$
$$\tfrac{1}{2}(-a+b+c)=\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B\sin c-\tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B\sin 2c$$
$$+\tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}B\sin 3c-\ldots. \quad (26.)$$

Die Bedingungen der Konvergenz sind hier dieselben, wie dort (§. 86.)

Für den Fall, wenn $A+B<\pi$ und $A<B$, erhält man aus (9.) und (10.)

$$a=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B)\sin c$$
$$+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B-\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}B)\sin 2c$$
$$+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}B+\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B)\sin 3c+\ldots. \quad (27.)$$
$$b=c+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B)\sin c$$
$$+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}B+\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}B)\sin 2c$$
$$+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A(\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}B-\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B)\sin 3c+\ldots. \quad (28.)$$

Und wenn $A+B>\pi$, $A<B$; aus (11.) und (12.)

$$\pi-b=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B(\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B)\sin c$$
$$+\tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}B(\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}A-\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A)\sin 2c$$
$$+\tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B(\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}A\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A)\sin 3c+\ldots. \quad (29.)$$
$$a=\pi-c+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}B(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A-\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}A)\sin c$$
$$-\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}B(\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}A+\operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}A)\sin 2c$$
$$+\tfrac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}B(\operatorname{tg}^3\tfrac{1}{2}A-\operatorname{cotg}^3\tfrac{1}{2}A)\sin 3c-\ldots. \quad (30.)$$

de tten Winkel erhält man aus (17.)—(22.)

$\log\sin\frac{1}{2}C = \log(\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B) - \operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{1}{2}B\cos c$
$- \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B\cos 2c$
$- \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}A\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}B\cos 3c - \ldots\ldots$ (31.)

$\log\sin\frac{1}{2}C = \log(\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B) - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B\cos c$
$- \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}A\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}A\cos 2c$
$- \frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3\frac{1}{2}A\operatorname{cotg}^3\frac{1}{2}B\cos 3c - \ldots\ldots$ (32.)

$\log\cos\frac{1}{2}C = \log(\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B) + \operatorname{tg}\frac{1}{2}A\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B\cos c$
$- \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}B\cos 2c$
$+ \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{1}{2}A\operatorname{cotg}^3\frac{1}{2}B\cos 3c - \ldots\ldots$ (33.)

$\log\cos\frac{1}{2}C = \log(\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B) + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A\operatorname{tg}\frac{1}{2}B\cos c$
$- \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}A\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B\cos 2c - \ldots\ldots$ (34.)

$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B - \operatorname{tg}\frac{1}{2}A(\operatorname{tg}\frac{1}{2}B + \operatorname{cotg}\frac{1}{2}B)\cos c$
$- \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A(\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B - \operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}B)\cos 2c - \ldots\ldots$ (35.)

$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}A - \operatorname{cotg}\frac{1}{2}B(\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A + \operatorname{tg}\frac{1}{2}A)\cos c$
$- \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}B(\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}A - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A)\cos 2c - \ldots\ldots$ (36.)

Unter den §. 16. für das rechtwinklige Dreieck aufgestellten Formeln lassen die unter II, IV, VI angeführten, die alle von der Form:

$$\operatorname{tang} z = p \operatorname{tang} u$$

sind nach §. 7, V. dieselbe Auflösung in Reihen zu. Z. B. aus der Gleichung $\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin b}$ erhält man

$$\operatorname{tang}(A-a) = \frac{\left(\frac{1-\sin b}{1+\sin b}\right)\sin 2a}{1-\left(\frac{1-\sin b}{1+\sin b}\right)\cos 2a};$$

$$= \frac{\operatorname{tang}^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}b)\sin 2a}{1-\operatorname{tang}^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}b)\cos 2a};$$

und $$\operatorname{tang}(A+a) = \frac{\operatorname{cotg}^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}b)\sin 2a}{1-\operatorname{cotg}^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}b)\sin 2a};$$

und hieraus die Reihen:

$A-a = \operatorname{tg}^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}b)\sin 2a + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^4(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}b)\sin 4a + \ldots$

$A+a = \operatorname{ctg}^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}b)\sin 2a + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^4(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}b)\sin 4a + \ldots$

C. Auflösung sehr kleiner sphärischer Dreiecke.

§. 89.

Wenn die Seiten eines sphärischen Dreieckes im Verhältniß zu dem — als Lineareinheit angenommenen — Kugelradius sehr klein sind, so ist das Dreieck sehr wenig von einem ebnen verschieden und man würde schon eine annähernde Auflösung erhalten, wenn man dasselbe für ein völlig ebnes nähme. Dabei würde aber der Flächenraum des sphärischen Dreieckes, der den Ueberschuß der Winkelsumme über zwei Rechte ausmacht, als Null behandelt. Eine genauere Auflösung muß daher diesen Ueberschuß mit in Rechnung ziehen und dazu dient die hier zu entwickelnde, von Legendre gefundene, eben so einfache als interessante, Regel.

Sind die Seiten a, b, c eines sphärischen Dreieckes sehr klein, so kann man in der Formel:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

die Kosinus und Sinus derselben nach den §. 6. angegebenen Reihen durch die Bogen ausdrücken, indem die über den vierten Grad hinaus gehenden Potenzen als verschwindend weggelassen werden.

Es ist dann:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^4}{1.2.3.4};$$

$$\cos b = 1 - \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4};$$

$$\cos c = 1 - \frac{c^2}{1.2} + \frac{c^4}{1.2.3.4};$$

$$\sin b = b - \frac{b^3}{1.2.3}; \quad \sin c = c - \frac{c^3}{1.2.3};$$

Werden diese Werthe in der Formel für cos A eingesetzt und nur die Glieder bis zum vierten Grade beibehalten, so ergiebt sich:

$$\cos A = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2} + \frac{a^4-b^4-c^4}{24} - \frac{b^2c^2}{4}}{bc\left(1-\frac{b^2}{6}-\frac{c^2}{6}\right)};$$

Multiplizirt man Zähler und Nenner mit $1+\frac{b^2+c^2}{6}$ so erhält man:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2}{24bc};$$

Sind nun A′, B′, C′ die Winkel desjenigen ebnen Dreieckes, dessen Seiten den Bogen a, b, c gleich sind, so ist:

$$\cos A' = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$4b^2c^2\sin^2 A' = 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4;$$

Daher ist $\cos A = \cos A' - \frac{bc}{6}\sin^2 A'$;

Setzt man nun $A = A'+x$, so ist:

$$\cos A = \cos A' - \sin A'x - \cos A'\frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots$$

also $\cos A' - \frac{bc}{6}\sin^2 A' = \cos A' - \sin A'x - \cos A'\frac{x^2}{1.2} + \ldots$

mithin $\frac{bc\sin^2 A'}{6} = \sin A'.x + \cos A'\frac{x^2}{1.2} - \ldots.$

woraus hervorgeht, daß x vom zweiten Grade ist. Läßt man daher x^2 als verschwindend weg, so erhält man nahe bis zum vierten Grade genau:

$$\sin A'.x = \frac{bc.\sin^2 A'}{6}$$

und hieraus $$x = \frac{bc.\sin A'}{6}.$$

Nun ist $\frac{bc\sin A'}{2}$ der Flächenraum des ebnen Dreieckes aus den Seiten a, b, c, der mit τ bezeichnet sei. Da dieser von dem des sphärischen Dreieckes nur um eine Differenz des vierten Grades verschieden ist, so kann der eine für den

andern genommen werden und man hat mit derselben Genauigkeit wie oben:

$$A = A' + \tfrac{1}{3}\tau;$$

Eben so erhält man $B = B' + \frac{1}{3}\tau$; $C = C' + \frac{1}{3}\tau$. Daraus ergiebt sich der merkwürdige Satz:

Wenn die Seiten eines sphärischen Dreieckes sehr klein sind im Verhältniß zum Kugelradius, so ist jeder Winkel desselben um den dritten Theil des Flächeninhaltes des sphärischen Dreieckes größer als der entsprechende Winkel desjenigen ebnen Dreieckes, das mit dem sphärischen gleiche Seiten hat.

Es kann also die Auflösung eines sphär. Dreieckes auf die eines ebnen zurückgeführt werden, wenn man für jenes ein ebnes substituirt, dessen Seiten den des sphärischen Dreieckes gleich, dessen Winkel aber um $\frac{1}{3}$ des Flächeninhaltes des sphärischen oder des ebnen Dreieckes kleiner, als die Winkel in jenem, sind.

§. 90.

Um den in Theilen des Kugelradius genommenen Flächenraum oder Winkelüberschuß τ in Sekunden auszudrücken, multiplizirt man τ mit der Zahl der Sekunden, die auf den Kugelradius kommen. Bezeichnet man diese Zahl mit r, die Zahl der in τ enthaltenen Sekunden mit s, so ist:

$$\tau = \frac{s}{r};\ \text{daher}\ s = r\tau;$$

Sind die Seiten des sphärischen Dreieckes nach einer andern Lineareinheit (z. B. Ruthe) gemessen, die im Kugelradius R mal enthalten ist, und ist S der nach dieser Einheit gemessene Flächenraum des Dreieckes, so ist:

$$S = R^2\tau = \frac{R^2 s}{r};$$

daher ..... $$s = \frac{S.r}{R^2}$$

Der Flächenraum S alſo, der aus den gegebenen Stücken des Dreieckes, indem man daſſelbe als eben betrachtet, leicht zu finden iſt, wird in Sekunden verwandelt, wenn man S mit dem beſtändigen Faktor $\frac{r}{R^2}$ multiplizirt; oder: zu dem Logarithmus von S iſt der beſtändige Logarithmus von $\frac{r}{R^2}$ zu addiren, um den Logarithmus von s zu erhalten.

Die Zahl r der in dem Halbmeſſer eines Kreiſes enthaltenen (Sexageſimal-) Sekunden iſt 206264,8 und

$$\log r = 5{,}3144251$$

Für die auf der Erdkugel entworfenen ſphäriſchen Dreiecke iſt in Ruthen (rheinl.) R = 1691861,9 daher:

$$\log \frac{r}{R^2} = 2{,}8576954 - 10;\ ^*)$$

Addirt man alſo 2,8576954 zu log S und zieht von der Summe 10 Einer ab, ſo hat man log s. Es ſei z. B. in Ruthen $a = 35100;\ b = 28600;\ C = 110°40';$

ſo iſt ..... $\log a = 4{,}5453071$

$\log \frac{1}{2} b = 4{,}1553360$

$\log \sin C = 0{,}9711132 - 1$

daher $\log S = 8{,}6717563$

dazu ..... $2{,}8576954 - 10$

giebt ..... $\log s = 1{,}5294517$

$s = 33'',84$ daher $\frac{1}{3} s = 11'',28.$

Daher iſt $C' = C - \frac{1}{3} s = 110°39'48'',72$

---

*) Iſt eine andre Einheit zur Meſſung gebraucht worden, die n Ruthen enthält, ſo hat man zu obigem Logarithmus 2,8576954 — 10 noch 2 log n zu addiren. Z. B. für rheinl. Fuß (Duodez.) iſt $n = \frac{1}{12}$; daher in ſolchen Fußen $\log \frac{r}{R^2} = 0{,}6993329 - 10.$

In Pariſ. Fuß iſt $\log \frac{r}{R^2} = 0{,}7292131 - 10.$

In metres ..... $= 1{,}7036649 - 10.$

Man hat also ein ebnes Dreieck aufzulösen, in welchem gegeben ist:

$$a = 35100$$
$$b = 28600$$
$$C' = 110° 39' 48'', 72$$

Aus der Formel $\tang \frac{1}{2}(A' - B') = \frac{a-b}{a+b} \cotg \frac{1}{2} C'$

erhält man: $\frac{1}{2}(A' - B') = 4° 2' 12'', 58$

$\frac{1}{2}(A' + B') = 34° 40' 5'', 64$

$$A' = 38° 42' 18'', 22$$
$$B' = 30° 37' 53'', 06$$

Zu diesen Winkeln $\frac{1}{2}$s addirt giebt:

$$A = 38° 42' 29'', 50$$
$$B = 30° 38' 4'', 34$$

Die dritte Seite c findet sich aus der Formel $c = \frac{a \cdot \sin C'}{\sin A'}$; man erhält:

$$c = 52521$$

§. 91

Dieselbe Auflösung läßt sich auch auf sphär. Dreiecke anwenden, in denen zwei Seiten dem Halbkreise sehr nahe kommen. Denn sind dies die Seiten a, b des Dreieckes $\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ A & B & C\end{matrix}\right\}$, so sind in dem Nebendreiecke $\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha} & \bar{\beta} & \bar{\gamma} \\ \bar{a} & \bar{b} & c \\ \bar{A} & \bar{B} & C\end{matrix}\right\}$ die Seiten $\bar{a}$, $\bar{b}$ sehr klein; auch c sehr klein, da $c < \bar{a} + \bar{b}$ sein muß. Das Dreieck $(\alpha\beta\gamma)$ kann man daher wie oben durch ein ebnes Dreieck auflösen und daraus die gesuchten Stücke von $(\alpha\beta\gamma)$ finden.

Eben so können sphär. Dreiecke, in denen zwei Winkel sehr klein sind, aufgelöst werden. Denn sind in dem Dreiecke $\left\{\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ A & B & C\end{matrix}\right\}$ die Winkel A, B sehr klein, so sind in

dem Neben-Polardreiecke $\left\{\begin{matrix} a\,b\,\bar{c} \\ A\,B\,\bar{C} \\ a\,b\,\bar{c} \end{matrix}\right\}$ die Seiten A, B, ſo wie auch die dritte $\bar{C}$ ſehr klein. Indem alſo $(ab\bar{c})$ auf die oben gezeigte Weiſe aufgelöſt wird, erhält man die Stücke von $(\alpha\beta\gamma)$.

Anhang II.

Einige Sätze als Ergänzung zum erſten Theile der Sphärik.

Anmerk. Die eingeklammerten Paragraphenzahlen beziehen ſich auf den erſten Theil und deuten an, wo dieſe Sätze einzuſchalten ſind.

§. 92. (§. 61 a.)

Lehrſatz. Jeder zwiſchen zwei Gegenkreiſen liegende Bogen eines Hauptkreiſes wird von dem jenen Gegenkreiſen parallelen Hauptkreiſe halbirt.

Beweis. Zwiſchen den Gegenkreiſen (Fig. 41.) ABC, A′B′C′ liegender Bogen BB′, der verlängert in B″, B‴ zum zweitenmale von jenen, und in D, D′ von dem zu den Polen M, M′ der Gegenkreiſe gehörigen Hauptkreiſe EF geſchnitten wird. Da B″, D′ die Gegenpunkte von B′, D ſind, ſo iſt der Bogen B′D = B″D′.

Fällt man von M ein Perpendikel MG auf die ſphär. Sehne BB″, ſo wird dieſe dadurch halbirt. Auch der Halbkreis DGD′ wird dadurch halbirt, wie aus der Gleichheit der rechtwinkligen Quadrantendreiecke MGD, MGD′ hervorgeht — oder weil DGD′ eine ſphär. Sehne des Hauptkreiſes EDF iſt. Daher iſt GD − GB = GD′ − GB′ d. i. BD = B″D′; mithin auch BD = DB′.

Zuſ. 1. Die Mittelpunkte aller zwiſchen zwei Gegenkreiſen enthaltenen Bogen (von Hauptkreiſen) liegen auf der Peripherie des den Gegenkreiſen parallelen Hauptkreiſes.

Zuſ. 2. Da GD ein Quadrant iſt, ſo iſt BD das Komplement der halben Sehne BB″. Wenn alſo beliebige (ſphär.) Sehnen eines Nebenkreiſes um die Komplemente ihrer Hälften verlängert werden; ſo liegen die Endpunkte aller Verlängerungen in dem Hauptkreiſe, der dem Nebenkreiſe parallel iſt.

§. 93. (§. 69a.)

Lehrſatz. Wenn zwei Hauptkreiſe von dem Pole zweier Parallelkreiſe, mit denen ſie ſich ſchneiden, gleichen Abſtand haben; ſo ſind die zwiſchen den Parallelkreiſen enthaltenen Bogen der Hauptkreiſe gleich.

Beweis. Es ſeien (Fig. 42.) AD, A′D′ Bogen zweier Hauptkreiſe und M der Pol (Mittelpunkt) zweier Parallelkreiſe AA′, BB′, mit denen ſich jene ſchneiden. Da AD, AD′ gleich weit von M entfernt ſind, ſo ſind die von M auf dieſelben gefällten Perpendikel ME, ME′ gleich; daher auch die Sehne BC = B′C′; AD = A′D′; folglich, da E, E′ die Mittelpunkte der Sehnen ſind, EB = E′B′; EA = E′A′. Hieraus folgt, daß AB = A′B′ = CD = C′D′ iſt.

Zuſ. 1. Der Satz gilt offenbar nicht nur von zwei, ſondern von beliebig vielen Hauptkreiſen.

Zuſ. 2. Wenn die Hauptkreiſe gleichen Abſtand vom Mittelpunkte M haben, ſo ſtehen auch ihre Pole gleich weit von M; und umgekehrt. Die Polentfernung iſt aber das Supplement des Neigungswinkels der Kreiſe; daher läßt ſich der Satz auch ſo ausſprechen:

Wenn zwei oder mehr Hauptkreiſe ſich unter gleichen Winkeln mit zwei Parallelkreiſen ſchneiden, ſo ſind die zwiſchen den letzteren enthaltenen Abſchnitte der Hauptkreiſe gleich.

Zuſ. 3. Beſchreibt man um M mit dem ſphär. Radius ME einen Kris, ſo berühren dieſen alle um ME von M entfernten Hauptkreiſe; und umgekehrt. Daher ergiebt ſich folgender Ausdruck des Lehrſatzes:

Wenn mehrere Hauptkreiſe einen Nebenkreis berühren, ſo ſind die zwiſchen je zwei demſelben parallelen Kreiſen enthaltenen Bogen derſelben gleich.

Und da die Pole aller berührenden Hauptkreiſe auf dem Polarkreiſe des berührten liegen, ſo folgt:

Wenn mehrere Hauptkreiſe ihre Pole auf der Peripherie eines Nebenkreiſes haben, ſo ſind die zwiſchen je zwei dieſem Nebenkreiſe parallelen Kreiſen enthaltenen Abſchnitte derſelben gleich.

Daß der eine von den Parallelkreiſen ein Hauptkreis oder der Gegenkreis des andern ſein kann, iſt klar.

§. 94. (§. 69. b.)

Lehrſatz. Wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte zweier Hauptkreiſe gleich ſind, ſo haben dieſe gleichen Abſtand vom Mittelpunkte der Parallelkreiſe.

Beweis. Iſt AB = A′B′ (Fig. 42.); ſo ſind die durch die Radien MA, MB, MA′, MB′ gebildeten Dreiecke MAB, MA′B′ wegen Gleichheit der Seiten gleich; daher der Winkel ABM = A′B′M und MBD = MB′D′. In den durch die Perpendikel ME, ME′ gebildeten rechtwinkligen Dreiecken MBE, MB′E′ ſind nun die Hypotenuſen MB, MB′ nebſt den anliegenden Winkeln MBE, MB′E′; daher die Dreiecke ſelbſt gleich und ME = ME′; alſo die Kreiſe AD, A′D′ gleich weit vom Mittelpunkte M.

Zuſ. 1. Hieraus ergeben ſich die Umkehrungen der Zuſätze des vorigen §.

1) Wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Bogen mehrerer Hauptkreiſe gleich

sind; so berühren die Hauptkreise einen Nebenkreis, der jenen Parallelkreisen parallel ist.

2) Wenn die zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen Abschnitte mehrerer Hauptkreise gleich sind, so liegen die Pole der Hauptkreise auf einem Nebenkreise, der jenen Parallelkreisen parallel ist.

3) Wenn die zwischen zwei Parallelkreisen enthaltenen Abschnitte mehrerer Hauptkreise gleich sind, so sind die Hauptkreise unter gleichen Winkeln gegen die Parallelkreise geneigt.

§. 95. (§. 69c.)

Lehrsatz. Wenn zwei Hauptkreise ungleichen Abstand von dem Mittelpunkte zweier Parallelkreise, mit denen sie sich schneiden, haben; so ist unter den zwischen den Parallelkreisen enthaltenen Abschnitten derselben der zum entfernteren gehörige der größere.

Beweis. Es seien (Fig. 43.) ABCD und A′B′C′D′ zwei Hauptkreise, von denen der letztere weiter vom Mittelpunkte M der Parallelkreise absteht, als ABCD. Zieht man durch A einen dritten Hauptkreis AFG, der mit A′B′D′ gleichen Abstand von M hat; so ist nach §. 93. AF = A′B′. Es ist aber AF > AB, weil die Sekante AG weiter von M entfernt ist, als AD (g. S. §. 63, Zus. 2.); folglich ist A′B′ > AB.

Zus. 1. Der dem Pole M nähere Hauptkreis ABD berührt einen kleineren Parallelkreis desselben Poles als der entferntere A′B′D′. Dagegen liegt der Pol des ersteren auf der Peripherie eines größeren Polarkreises und bildet mit den Parallelkreisen einen dem Rechten näheren Winkel. Hieraus ergeben sich die Sätze:

1) Wenn zwei oder mehrere Hauptkreise mit zwei Parallelkreisen sich schneiden, so sind die

zwiſchen den letzteren enthaltenen Abſchnitte derjenigen Hauptkreiſe, welche kleinere Parallelkreiſe deſſelben Poles berühren, die kleineren.

2) Wenn mehrere Hauptkreiſe mit zwei Parallelkreiſen ſich ſchneiden, ſo ſind die zwiſchen den letzteren enthaltenen Abſchnitte derjenigen Hauptkreiſe, deren Pole auf größeren und jenen Parallelkreiſen parallelen Nebenkreiſen liegen, die kleineren.

3) Wenn mehrere Hauptkreiſe ſich mit zwei Parallelkreiſen ſchneiden, ſo ſind die zwiſchen den Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte derjenigen Hauptkreiſe die kleineren, deren Neigungswinkel mit den Parallelkreiſen die dem Rechten näheren ſind.

Zuſ. 2. Umgekehrt, wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte zweier Hauptkreiſe ungleich ſind; ſo iſt der zum größeren Abſchnitte gehörige Hauptkreis entfernter vom Pole der Parallelkreiſe, als der andere. Denn iſt $A'B' > AB$; ſo kann $A'D'$ weder näher, noch eben ſo nahe an M ſein, als AD. Daher ſind auch die Umkehrungen vorſtehender Sätze gültig:

1) Wenn ungleiche Abſchnitte mehrerer Hauptkreiſe zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthalten ſind, ſo berühren die zu den größeren gehörigen Hauptkreiſe größere Parallelkreiſe (deſſelben Poles, wie jene zwei Parallelkreiſe).

2) Wenn ungleiche Abſchnitte mehrerer Hauptkreiſe zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthalten ſind, ſo liegen die Pole der zu den größeren gehörigen Hauptkreiſe auf kleineren Parallelkreiſen.

3) Wenn ungleiche Abſchnitte mehrerer Hauptkreiſe zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthalten

sind, so sind die Neigungswinkel, welche die zu größeren Abschnitten gehörigen Hauptkreise mit den Parallelkreisen bilden, vom Rechten entfernter (oder schiefer).

§. 96.

Erklärung. Wie die zwei Seiten eines Kreises (oder einer Ebne) in Bezug auf einen gewissen Winkel, welchen derselbe mit einem andern Kreise bildet, in positive und negative unterschieden wurden (g. S. §. 10, Anmerk.); so kann dieselbe Unterscheidung eingeführt werden, in Rücksicht irgend eines gegebenen Punktes auf der Kugelfläche, welchem die eine Seite des Kreises zugekehrt, die andere abgekehrt ist; so daß gleichartige Seiten zweier Kreise diejenigen heißen, welche jenem Punkte beide zugekehrt, oder beide abgekehrt sind; ungleichartige aber, von denen die eine eine zugekehrte, die andere eine abgekehrte ist.

In dem Folgenden gilt diese Benennung von den Seiten zweier Hauptkreise, oder ihrer Bogen, in Rücksicht des Poles oder sphärischen Mittelpunktes eines Nebenkreises, mit welchem sich jene schneiden, oder auch nicht schneiden.

§. 97. (§. 69 d.)

Lehrsatz. Wenn zwei Hauptkreise von dem (sphär.) Mittelpunkte zweier Parallelkreise, mit denen sie sich schneiden, gleich weit entfernt sind; so sind die zwischen den ungleichartigen Seiten der Hauptkreise enthaltenen Bogen der Parallelkreise einander ähnlich.

Beweis. Die Hauptkreise ABD, A′B′D′ (Fig. 44.) seien gleich weit von M, dem Pole der Parallelkreise BB′CC′ und AA′DD′ entfernt. Zwischen den ungleichartigen Seiten, derselben liegen die Nebenbogen BB′ und AA′, so wie CC′ und DD′; deren Aehnlichkeit zu erweisen ist. Man ziehe die sphär. Radien MA, MB, MA′, MB′. Die dadurch ent-

ſtandenen Dreiecke MAB, MA′B′ ſind wegen Gleichheit aller Seiten gleich; denn es iſt MA=MA′; MB=MB′ und nach §. 93. auch AB=A′B′. Daher iſt der Winkel AMB =A′MB′. Addirt man zu dieſen den Winkel BMA′, ſo folgt: AMA′=BMB′. Zu gleichen Zentriwinkeln gehören nun ähnliche Bogen; mithin iſt BB′ ∼ AA′. Da CC′=BB′ und DD′=AA′; ſo iſt auch CC′ ∼ DD′.

Schneiden ſich die Hauptkreiſe nicht innerhalb der Parallelkreiſe, wie Fig. 42, ſo ſind BB′C′ und AA′D die zwiſchen ungleichartigen Seiten liegenden Bogen, deren Aehnlichkeit durch dieſelben Schlüſſe erhellet.

Zuſ. 1. Aus dem Lehrſatze und aus §. 94. ergeben ſich folgende Sätze:

1) Wenn die zwiſchen zwei Parallelkreiſen enthaltenen Abſchnitte zweier Hauptkreiſe gleich ſind — —

oder 2) Wenn zwei Hauptkreiſe, die ſich mit zwei Parallelkreiſen ſchneiden, einen dritten (kleineren) Parallelkreis der letzteren berühren — —

oder 3) Wenn zwei Hauptkreiſe, die ſich mit zwei Parallelkreiſen ſchneiden, ihre Pole auf einem dritten Parallelkreiſe der letzteren haben — —

oder 4) Wenn zwei Hauptkreiſe ſich mit zwei Parallelkreiſen unter gleichen Neigungswinkeln ſchneiden — —

ſo ſind die zwiſchen den ungleichartigen Seiten der Hauptkreiſe enthaltenen Bogen der Parallelkreiſe ähnlich.

Daß dieſe Sätze auch von mehr als zwei Hauptkreiſen und Parallelkreiſen gültig ſind, bedarf keiner Auseinanderſetzung.

Zuſ. 2. Es ſeien (Fig. 45.) AEB, A′EB′ zwei Hauptkreiſe auf der Kugelfläche AA′BB′ und DEC ein dritter

Hauptkreis, der den Winkel AEA′ der ersteren halbirt. Beschreibt man nun um einen willkürlichen Punkt m des halbirenden Kreises mehrere Parallelkreise aa′d, bb′e, cc′f so sind 1) die zwischen je zwei Parallelkreise fallenden Abschnitte von AEB, A′EB′ gleich; ab=a′b′; bc=b′c′. 2) die Bogen der Parallelkreise, welche zwischen den in Bezug auf m ungleichartigen Seiten derselben Hauptkreise liegen, sind ähnlich; nämlich a′d′d ∾ b′e′ ∾ c′f; so wie aa′d ∾ bb′e′ ∾ cc′f′.

Denn fällt man von m auf AE, A′E die Perpendikel mn, mn′ so sind die Dreiecke mnE, mn′E gleich (g. S. §. 30, Zus. 2.); daher mn=mn′; also AEB, A′EB′ gleich weit von m entfernt.

Zus. 3. Haben aber die Hauptkreise (Fig. 44.) AD, A′D′ ungleiche Entfernung von dem Mittelpunkte M der Parallelkreise, so sind die zwischen den ungleichartigen Seiten derselben enthaltenen Bogen der letzteren nicht ähnlich und es kann sowohl der innere, als der äußere Bogen der relativ größere sein. Denn ist 1) A′D′ der von M entferntere Kreis, so ist A′B′>AB; daher Winkel A′MB′>AMB, folglich BMB′>AMA′; also der innere Bogen BB′ relativ größer, als AA′. Ist 2) AD der von M entferntere Kreis, so ist AB>A′B′; hieraus folgt, daß der äußere Bogen AA′ der relativ größere ist. Nennt man die dem Mittelpunkte oder Pole M zugekehrten Seite der Kreise AD, A′D′ die innere, die abgekehrte, die äußere und bemerkt man, daß die Bogen BB′, AA′ auf der innern Seite von A′D′, auf der äußeren von AD liegen, so läßt sich die Bedingung, unter welcher der innere oder der äußere Bogen der relativ größere ist, so ausdrücken:

Liegen die Bogen auf der inneren Seite des entfernteren Hauptkreises, so ist der innere Parallelbogen der relativ größere; liegen sie auf der äußeren Seite des entfernteren, so ist der äußere Bogen der relativ größere.

§. 98. (§. 102a.)

Lehrſatz. Wenn um den Mittelpunkt eines der Gegenkreiſe, zwiſchen denen ein ſphäriſches Parallelogramm liegt, Parallelkreiſe beſchrieben werden; ſo ſind die innerhalb des Parallelogrammes fallenden Bogen derſelben einander ähnlich und die zwiſchen je zwei dieſer Parallelbogen enthaltenen Abſchnitte der Seiten des Parallelogrammes einander gleich.

Beweis. Es ſei ABCD (Fig. 46.) ein ſphäriſches Parallelogramm und um den Mittelpunkt M des durch A, B gehenden Gegenkreiſes ſeien Parallelkreiſe beſchrieben, deren Bogen ab, a′b′ innerhalb des Parallelogrammes liegen. Zunächſt iſt zu zeigen, daß die dem inneren Raume des Parallelogrammes zugekehrten Seiten der Bogen AC, BD in Rückſicht auf M ungleichartig ſind.

Liegt M auf der inneren Seite von BD, ſo fällt der von M nach B gezogene Radius zwiſchen AB und die nach E gehende Verlängerung von BD. Zieht man nun von M′, dem Gegenpunkte von M, den Radius M′C und verlängert AC über C nach F; ſo iſt Winkel ABE=CDF, weil ihre Nebenwinkel als Diagonalwinkel des Parallelogrammes gleich ſind. Ferner iſt der Winkel ABM=DCM′ (g. S. §. 95.); mithin iſt DCM<DCF; daher liegt M′ auf der inneren Seite von AC. Da nun M′C verlängert durch M geht und AC ſich mit M′CM zum zweitenmale nicht zwiſchen C und M ſchneiden kann; ſo liegt M auf der äußeren Seite von AC.

Liegt aber M auf der äußeren Seiten von BD, ſo ergiebt ſich auf dieſelbe Weiſe, daß dann die innere Seite von AC nach M gekehrt iſt. Demnach liegen in jedem Falle die Parallelbogen ab, a′b′ zwiſchen den in Bezug auf M ungleichartigen Seiten von AC und BD. Da nun AC=BD iſt, ſo haben die Hauptkreiſe, zu denen dieſe Bogen gehören, gleichen Abſtand von M; mithin iſt nach §. 97. ab ∾ a′b′ und nach §. 93. aa′=bb′.

Zuſ. 1. Beſchreibt man um M als Pol einen Hauptkreis, der in G, H die Seiten AC, BD ſchneidet; ſo iſt auch der Bogen GH deſſelben ähnlich den Parallelbogen ab, a'b'; ſo wie dem Nebenbogen AB des um M beſchriebenen Gegenkreiſes.

Zuſ. 2. Nimmt man auf zwei einander gegenüber ſtehenden Seiten AC, BD eines ſphär. Parallelogrammes von den Endpunkten A, B aus, welche zu einer und derſelben dritten Seite AB gehören, gleiche Abſchnitte Aa, Bb; ſo iſt der durch die Theilungspunkte a, b geführte, dem Nebenbogen AB parallele Bogen ab dieſem ähnlich.

§. 99. Zuſätze.

I) (zu §. 51.)

Zuſ. 5. Bezeichnet man den Flächenraum des Polarpolygones mit P', den Perimeter deſſelben mit p', den des urſprünglichen mit p; ſo iſt nach Zuſ. 3.

$$P = 2\pi - p' \quad \text{oder} \quad P + p' = 2\pi$$

Da durch 2π die Hälfte der Kugelfläche ausgedrückt wird, ſo kann dieſe Gleichung ſo ausgeſprochen werden:

Die Summe aus dem Flächenraume eines Polygones und dem Perimeter des Polarpolygones iſt der halben Kugelfläche gleich.

Nach demſelben Satze iſt auch $P' + p = 2\pi$; daher $P' + p = P + p'$ und $P - P = p - p'$ d. h.: Die Differenz der Flächenräume zweier Polarpolygone iſt der Differenz ihrer Perimeter gleich.

II) (Zu §. 74.)

Zuſ. 3. Unter den ſphär. Dreiecken und den Polygonen von gleich viel Seiten, welche in einen Kreis eingeſchrieben werden können, iſt das größte ein regelmäßiges.

Denn iſt ABCD.... (Fig. 47.) das größte unter dieſen Polygonen und daſſelbe wäre nicht gleichſeitig; ſo ſeien AB,

BC zwei auf einander folgende ungleiche Seiten. Beschreibt man nun über der Sehne AC ein gleichschenkliges Dreieck AB'C, so ist dasselbe größer als ABC; daher würde auch das Polygon AB'CD.... > CBCD.... sein; was gegen die Voraussetzung streitet. Daher muß ABCD.... gleichseitig, mithin regelmäßig sein. — Daß der Beweis von Dreiecken ebenfalls gilt, ist einleuchtend.

Zus. 4. Das regelmäßige Polygon (oder Dreieck) ist das größte unter allen in demselben Kreise beschriebenen Polygonen von eben so viel Seiten.

Zus. 5. Unter den umgeschriebenen Polygonen (und Dreiecken) von gleich viel Seiten hat das regelmäßige den kleinsten Umfang; so wie, umgekehrt, dasjenige unter den umgeschriebenen, welches den kleinsten Umfang hat, ein regelmäßiges sein muß.

Denn ist P ein umgeschriebenes regelmäßiges Polygon, so ist das Polarpolygon p desselben ein eingeschriebenes regelmäßiges. Der Flächenraum von p ist nun ein Maximum; folglich der Umfang von P ein Minimum.

Die Richtigkeit der Umkehrung erhellet eben so.

III) (Zu §. 75.)

Zus. 8a. Aus der Gleichung $T = 2C + U - \pi = 2C - \overline{U}$ folgt $\frac{1}{2}\overline{U} = C - \frac{1}{2}T$. Da $\frac{1}{2}\overline{U}$ der Winkel ist, welchen die sphär. Tangente mit der vom Berührungspunkte ausgezogenen Sehne macht, so ergiebt sich hieraus der Satz:

Der Winkel der Tangente und einer Sehne des Berührungspunktes ist kleiner, als der auf der entgegengesetzten Seite der Sehne stehende Peripheriewinkel und zwar um den halben Flächenraum des Dreieckes, welches durch die Sehne und die Schenkel des Peripheriewinkels gebildet wird.

IV) (Zu §. 81.)

Zus. 2. Unter den in einem Kreise beschriebe-

nen Dreiecken und Polygonen von gleich viel Seiten ist dasjenige, welches den größten Umfang hat, ein regelmäßiges.

Denn hat das Polygon ABCD.... (Fig. 47.) den größten Umfang und wären AB, BC zwei auf einander folgende ungleiche Seiten; so sei über der Sehne AC ein gleichschenkliges Dreieck AB'C beschrieben. Dann ist $AB' + B'C > AB + BC$; daher wäre der Umfang von AB'CD.... größer, als der von ABCD.... gegen die Voraussetzung. Mithin ist die Behauptung evident.

Zus. 3. Das regelmäßige Polygon hat den größten Umfang unter den in demselben Kreise beschriebene Polygonen von gleicher Seitenzahl; Dreiecke mit eingerechnet.

Zus. 4. Unter den um einen Kreis beschriebenen Polygonen von gleich viel Seiten hat das regelmäßige den kleinsten Flächenraum; umgekehrt ist das kleinste der umgeschriebenen ein regelmäßiges.

Der Beweis ist wie in II) Zus. 5.

V) (Zu §. 92.)

Zus. 2. Wenn aus n gegebenen Winkeln zwei nseitige Polygone so konstruirt sind, daß jedes einen Kreis berührt; so sind diese Kreise, so wie die Umfänge der Polygone gleich. Denn die Polarpolygone enthalten einerlei Seiten und liegen beide in Kreisen, die die Polarkreise jener sind. Diese Kreise sowohl, als die Flächenräume der eingeschriebenen Polygone, sind nun gleich; folglich auch die Umfänge jener Polygone und die Kreise, um welche dieselben beschrieben sind.

VI) (Zu §. 93.)

Zus. 2. Unter den aus n gegebenen Winkeln zusammengesetzten nseitigen Polygonen hat das einen Kreis berührende den kleinsten Umfang. Umgekehrt, in das aus n gegebenen Winkeln zusammengesetzte Polygon vom kleinsten Umfange läßt sich ein Kreis beschreiben.

Der Beweis wie oben.

VII) (Zu §. 95.)

Zuſ. 8. Durch den Hauptkreis, welcher zwei Gegenkreiſen eines ſphär. Parallelogrammes parallel iſt, werden die Diagonalen, ſo wie die zwiſchen derſelben Gegenkreiſen liegenden Seiten des Parallelogrammes halbirt. (§. 92.)

Zuſ. 9. Da die Diagonalen des Parallelogrammes ſich gegenſeitig halbiren, ſo liegt der Durchſchnitt und Mittelpunkt derſelben mit den Mittelpunkten je zweier einander gegenüber ſtehender Seiten in einem Hauptkreiſe und zwar in demjenigen, der den Gegenkreiſen, von denen jene Seiten begrenzt werden, parallel iſt.

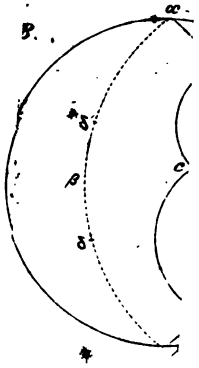
Zuſ. 10. Der Durchſchnittspunkt der Diagonalen iſt auch der Durchſchnitt und Mittelpunkt der beiden Bogen, welche die Mittelpunkte je zweier gegenüber ſtehender Seiten des Parallelogrammes verbinden.

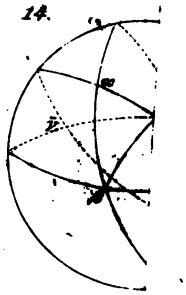
Denn zieht man in dem Parallelogramm ABCD (Fig. 48.) die Diagonale AD und durch die Mittelpunkte F, G der Seiten AC, BD den Bogen FG, der in E ſich mit AD ſchneidet; ſo iſt das Dreieck AEF = DEG, weil AE = ED (Zuſ. 9.) und die anliegenden Winkel gleich ſind. Daher iſt FE = EG; alſo E auch der Mittelpunkt von FG.

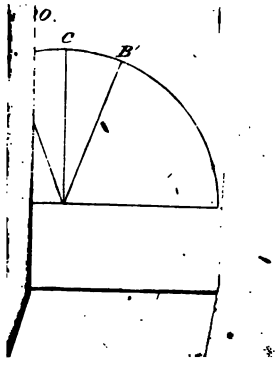
Hieraus folgt daß E auch der Mittelpunkt des Bogens HI iſt, der die Seiten AB, CD halbirt.

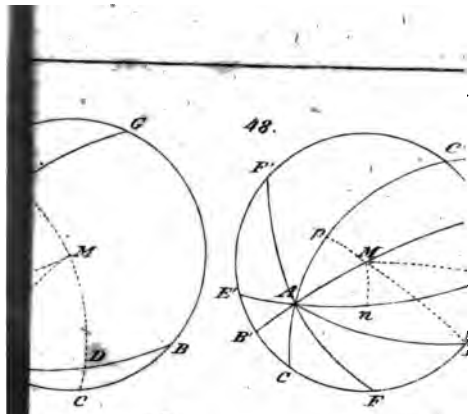
Anmerk. Der Punkt E kann daher der Mittelpunkt des Parallelogrammes genannt werden. Er hat übrigens auch die Eigenſchaft, daß jeder durch denſelben geführte Hauptkreis das Parallelogramm halbirt.

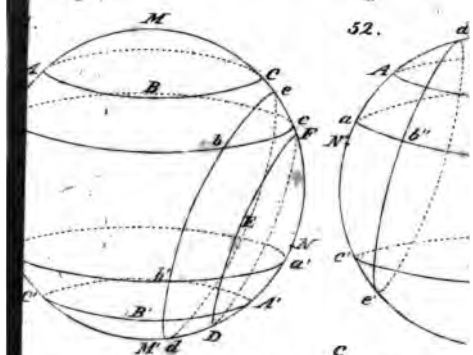
B.
A'
A
D
C
B
B

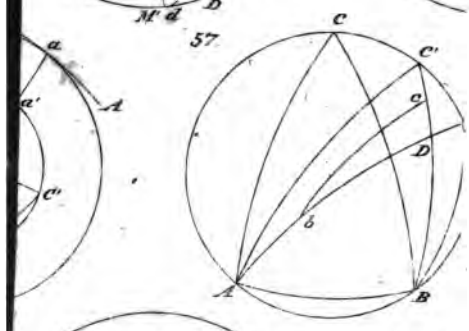

B.
α
δ
β
δ
c

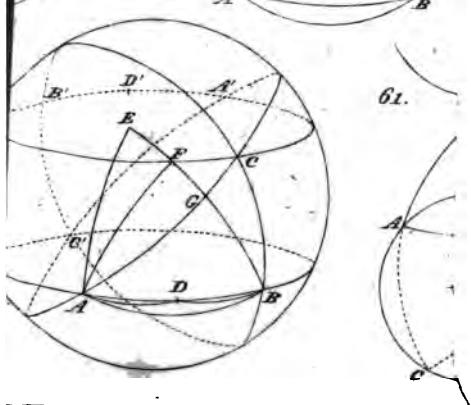

14.
E

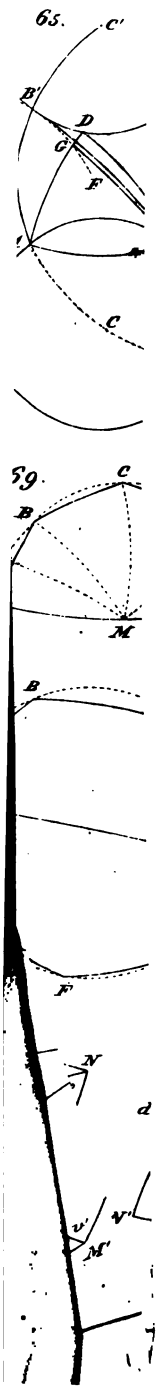

10.
C
B'


48.
G
M
D
B
C
F'
C'
p
M
E'
A
n
B'
C
F

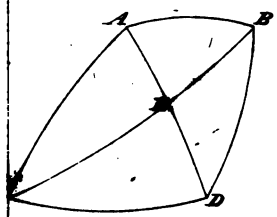

M
B
C
e
c
F
b
E
N
a'
b'
c'
B'
A'
M'
d
D
52.
d
A
a
N'
b''
c'
e


57.
a
a'
A
c'
C
C'
c
D
b
A
B

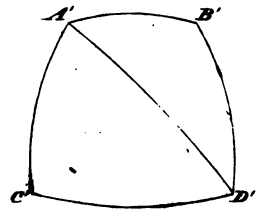

B'
D'
A'
E
F
C
G
C'
D
A
B
61.
A
C


65.
C'
B'
D
C
F'
C
59.
C
B
M
B
F
N
d
v'
V'
M'

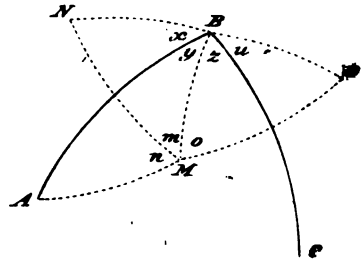
77.

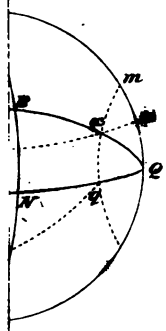


78.

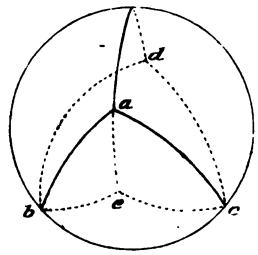


81.

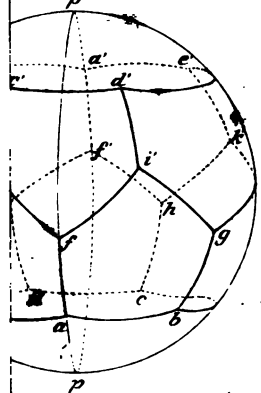




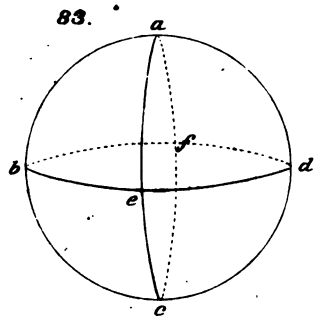
82.



85.

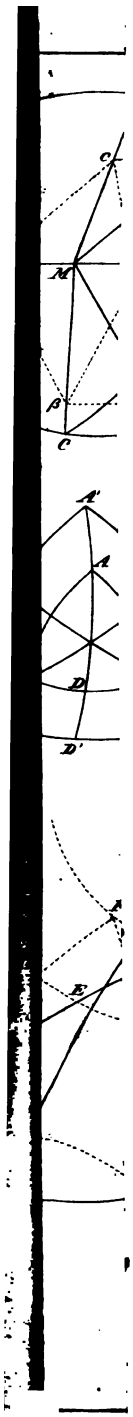


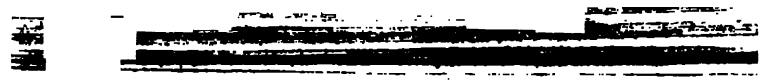
83.



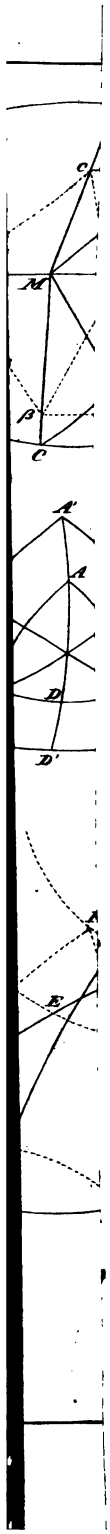
J. C. Böhme sc.

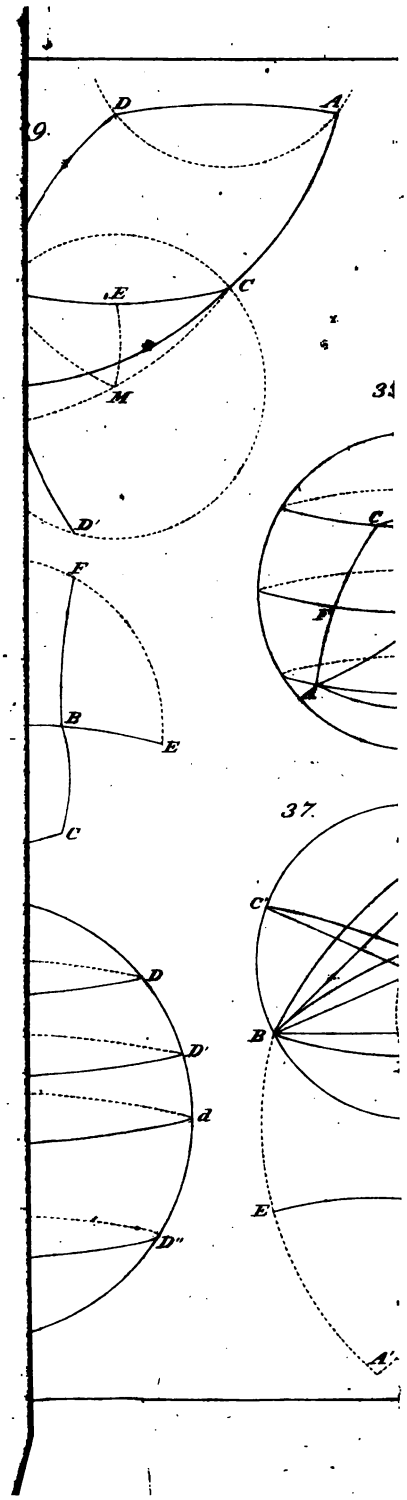
II.



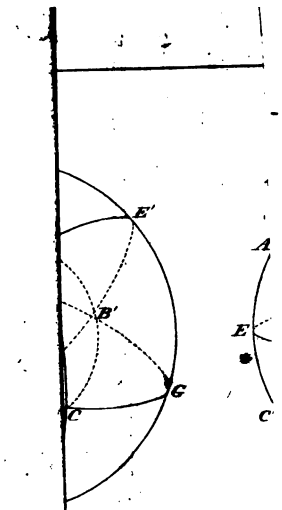


II.

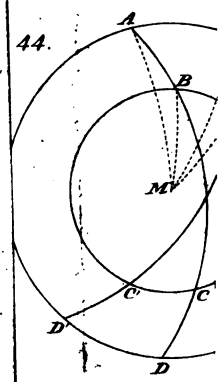


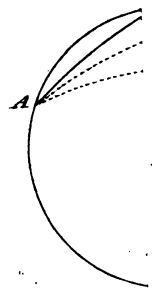

9.
D
A
E
C
M
D'
F
B
E
C
31.
C
F
A
37.
C
B
E
A
D
D'
d
D''

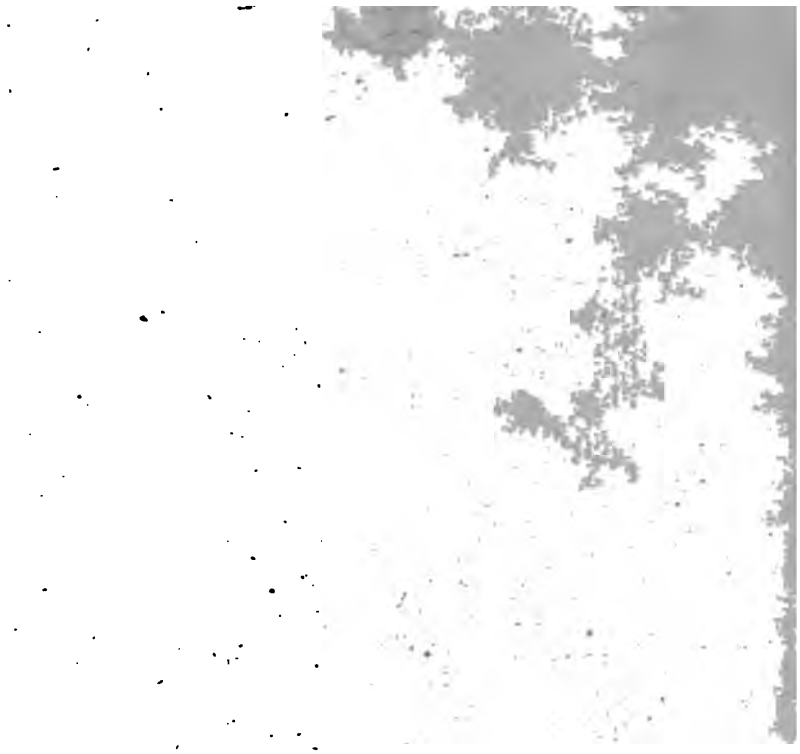
II



44.







MAY 3 - 1938